Práctico Madrid 2021 – Oposiciones secundaria Matemáticas

1 **(2,5 p.)** Dos arqueros A y B participan en una competición clasificatoria. Mediante un sorteo previo, se decide que inicia la actuación el tirador A.

A dispara una flecha y se clasifica si da en el centro de la diana. Si no lo consigue, es B quien toma la iniciativa y gana la competición si logra dar en el centro de la diana. En caso contrario, vuelve a tirar A y se repite el proceso descrito anteriormente. De este modo se van alternando los tiros hasta que uno acierta con el centro de la diana, momento en el que termina la competición con la clasificación del arquero que lo ha conseguido.

En cada uno de sus tiros A y B tienen , respectivamente, probabilidad p y q de alcanzar el centro de la diana.

a) **(0,75 p.)** Hallar la probabilidad de que el arquero A se clasifique.
b) **(0,75 p.)** Hallar la probabilidad de que el arquero B se clasifique.
c) **(1 p.)** ¿Qué condición han de verificar p y q para que el arquero B tenga ventaja sobre A? ¿Cuál es la probabilidad de que esto ocurra?

2 **(3 p.)** Se consideran los siguientes elementos en el plano:

c: Circunferencia de centro $C(0, a)$ y radio a, con $a > 0$.

s: Recta horizontal que pasa por el punto $(0,2a)$.

Se dibuja una recta r que pasa por el origen de coordenadas y cualquier punto $M(x_0, y_0)$ de la circunferencia distinto del origen de coordenadas.

Sea N el puntode intersección de la recta anterior con la recta s.

Se considera la curva que se obtiene por la intersección de la recta horizontal que pasa por M y la recta vertical que pasa por N al recorrer M la circunferencia c.

a) **(2 p.)** Determinar la ecuación de la curva
b) **(1 p.)** Hallar el área de la región delimitada por la curva y el eje de abscisas

3 **(2 p.)** Un hombre acude a un banco para cobrar un cheque por valor de E euros y C céntimos. El cajero, por error, la entrega un sobre con C euros y E céntimos. El cliente no se da cuenta del error hasta que gasta 23 céntimos y, además, observa que en ese momento tiene 2E euros y 2C céntimos. ¿cúal es el valor del cheque?

4 **(2,5 p.)** Dado el determinante de orden n

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 3 & .. & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 3 & .. & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & .. & 3 & 3 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 3 & 3 & 3 & .. & 8 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & .. & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

Se pide:

a) **(1,5 p.)** Calcular su valor.
b) **(1 p.)** Determina para qué valores de n dicho valor el múltiplo de 10

Soluciones	
1	**(2,5 p.)** Dos arqueros A y B participan en una competición clasificatoria. Mediante un sorteo previo, se decide que inicia la actuación el tirador A. A dispara una flecha y se clasifica si da en el centro de la diana. Si no lo consigue, es B quien toma la iniciativa y gana la competición si logra dar en el centro de la diana. En caso contrario, vuelve a tirar A y se repite el proceso descrito anteriormente. De este modo se van alternando los tiros hasta que uno acierta con el centro de la diana, momento en el que termina la competición con la clasificación del arquero que lo ha conseguido. En cada uno de sus tiros A y B tienen , respectivamente, probabilidad p y q de alcanzar el centro de la diana. a) **(0,75 p.)** Hallar la probabilidad de que el arquero A se clasifique. b) **(0,75 p.)** Hallar la probabilidad de que el arquero B se clasifique. c) **(1 p.)** ¿Qué condición han de verificar p y q para que el arquero B tenga ventaja sobre A? ¿Cuál es la probabilidad de que esto ocurra?

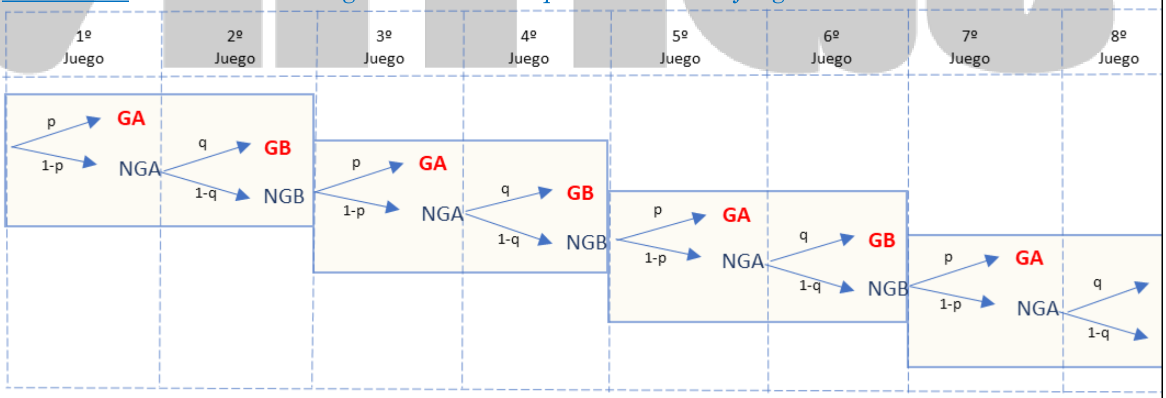
Solución:

Lo primero que observamos a la hora de hacer este ejercicio es que es una cadena de Markov modelizable por un diagrama de árbol. De forma general se pueden resolver de dos maneras distintas:

- La llamada forma recursiva
- Calculando las probabilidades de que gane cada jugador en cada partida y sumándolas.

Resolvamos los apartados a) y b) de las dos formas:

- Solución 1: Este sería el diagrama de árbol que modeliza el juego:



a) Sean los sucesos A: *"Gana el jugador A"* y sea A_k: *"Gana el jugador en la jugada $k-$ésima"*

Del diagrama de árbol anterior observamos que A solo puede ganar en las partidas impares,

observemos el comportamiento de las probabilidades en cada partida, averiguándolo para los primeros juegos:

$$p(A_1) = p$$

$$p(A_3) = (1-p)(1-q)p$$

$$p(A_5) = (1-p)(1-q)(1-p)(1-q)p = [(1-p)(1-q)]^2 p$$

.....

y así sucesivamente, al ser un comportamiento repetitivo:

$$p(A) = \sum_{k=0}^{\infty} [(1-p)(1-q)]^k p = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{p}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{p}{p+q-pq}$$

b) Sea el suceso B: *"Gana el jugador B"* y sea el suceso S: *"No ganan ninguno de los dos jugadores nunca"*

Lo que vemos en este ejercicio, es que hay como 3 posibilidades en el juego mirándolo indefinidamente, puede ganar A, o ganar B, o no gana ninguno de los dos indefinidamente, pero veamos que esta última probabilidad es 0, puesto que siempre se tendría que estar dando el complementario de ambas probabilidades.

$$p(S) = \lim_{k\to\infty} (1-p)(1-q)^k \overset{(1-p)(1-q)<1}{=} 0$$

Así, de aquí sacamos que B es el complementario de A.

$$p(B) = 1 - \frac{p}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{q-pq}{p+q-pq}$$

- Solución 2: En problemas de este estilo, de cadenas de Markov, si se detecta la recursividad como tal, se pueden resolver de forma más sencilla utilizando esta idea, veamos como se haría a continuación:

  a) En el gráfico del árbol, vemos que la probabilidad de que gane A el juego es la misma si el juego empieza en la primera partida que si empieza en la tercera puesto que es un juego que se juega indefinidamente.
  Así, la probabilidad de ganar A sería la probabilidad de ganar en una caja amarilla, mas la probabilidad de continuar el juego, y ganar a partir de la siguiente caja en adelante, así se cumplirá la siguiente ecuación

$$p(A) = p + (1-p)(1-q)p(A)$$

  Despejando en la ecuación llegamos a que:

$$p(A) - (1-p)(1-q)p(A) = p$$

$$[1-(1-p)(1-q)] \cdot p(A) = p$$

$$[p+q-pq]\cdot p(A)=p$$

$$p(A)=\frac{p}{p+q-pq}$$

b) Este apartado lo podríamos hacer de la misma forma que hemos hecho a) o con el complementario igual que antes.

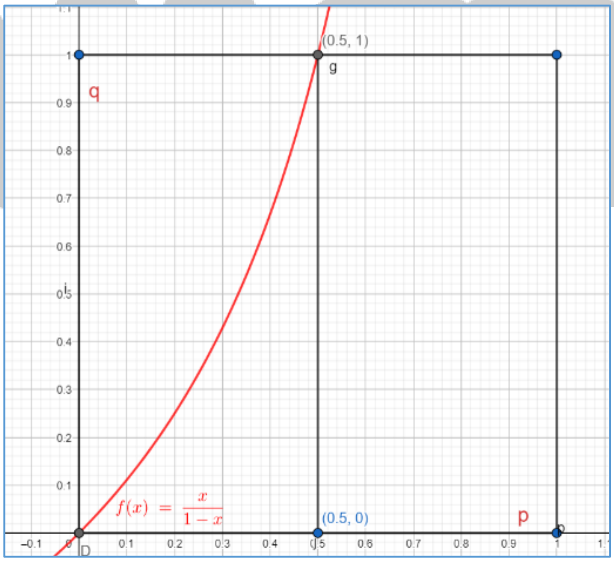
c) Para resolver el apartado c) simplemente tenemos que comparar las probabilidades de que ganen A o B:

$$p(B)>p(A)$$
$$\frac{q-pq}{p+q-pq}>\frac{p}{p+q-pq}$$

Como el denominador el positivo puesto que al ser números entre 0 y 1, $p+q>pq$

$$q-pq>p$$
$$(1-p)q>p$$
$$q>\frac{p}{1-p}$$

Para la segunda parte de este apartado, suponemos que las probabilidades p y q son elegidas al azar entre 0 y uno, es decir son variables aleatorias que se distribuyen uniformemente en el intervalo (0,1). Llamemos al suceso C: *"B tiene ventaja sobre A en el juego"*.



Al ser variables que se distribuyen uniformemente podemos ver geométricamente cuales serían las áreas a comparar y luego hacer las integrales, así vemos en el dibujo:

- El área válida es la que hay por encima de la gráfica para p entre 0 y $\frac{1}{2}$. Con lo cual calculemos esa integral y restemosela a $\frac{1}{2}$.

En la representación gráfica, en el eje de las X representaríamos a p y en el de las Y a q.

$$p(C)=\frac{1}{2}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{1-x}dx=\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-x}{1-x}dx+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{-1}{1-x}dx=\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{1}{2}}dx+\ln(1-x)\,|_0^{\frac{1}{2}}=1+\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=1-\ln(2)$$

2 **(3 p.)** Se consideran los siguientes elementos en el plano:

c: Circunferencia de centro $C(0,a)$ y radio a, con $a>0$.

s: Recta horizontal que pasa por el punto $(0,2a)$.

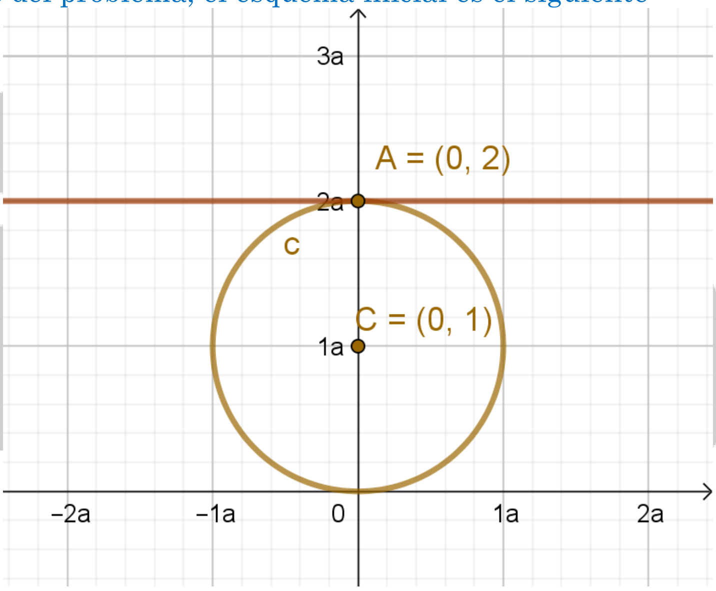
Se dibuja una recta r que pasa por el origen de coordenadas y cualquier punto $M(x_0,y_0)$ de la circunferencia distinto del origen de coordenadas.

Sea N el puntode intersección de la recta anterior con la recta s.

Se considera la curva que se obtiene por la intersección de la recta horizontal que pasa por M y la recta vertical que pasa por N al recorrer M la circunferencia c.

a) **(2 p.)** Determinar la ecuación de la curva
b) **(1 p.)** Hallar el área de la región delimitada por la curva y el eje de abcisas

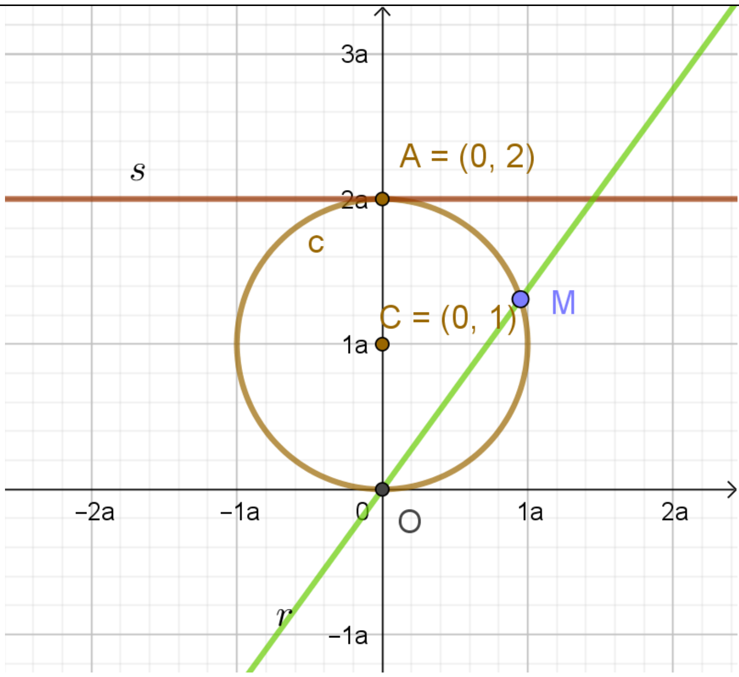
Con los elementos del problema, el esquema inicial es el siguiente:



Colocamos estos elementos analíticamente. Fabricamos las rectas usando la ecuación continua, pero puede hacerse de muchas otras formas, como determinando la pendiente de la recta:

$$\begin{cases} s \equiv \dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-2a}{0} \Rightarrow \boxed{s \equiv y = 2a} \\ \\ c \equiv x^2 + (y-2a)^2 = a^2 \end{cases}$$

Los siguientes elementos de los que habla el problema son la recta r, que pasa por el origen de coordenadas y el punto $M(x_0,y_0)$, perteneciente a la circunferencia, por el que pasa esta recta:

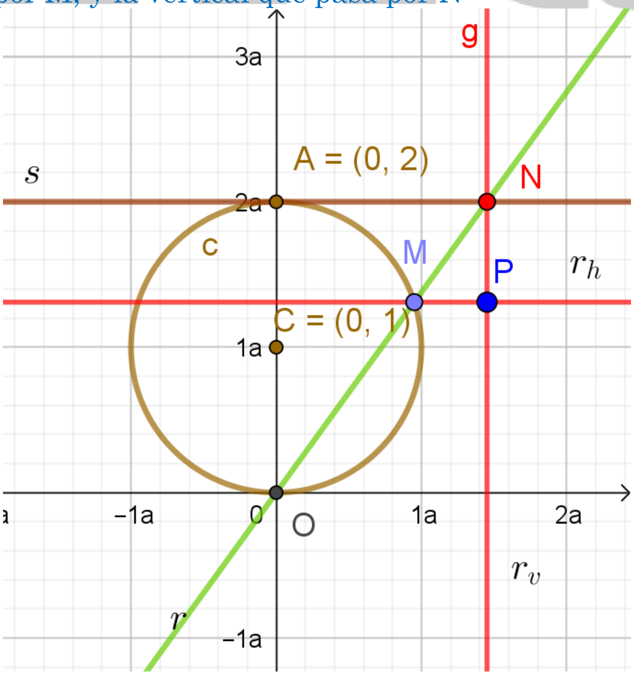


Analíticamente:

$$\begin{cases} r \equiv \dfrac{x}{x_0} = \dfrac{y}{y_0} \Rightarrow \boxed{r \equiv y = \dfrac{y_0}{x_0} x} \\ \boxed{M(x_0, y_0)} \end{cases}$$

En este punto, es muy importante intentar "geogebrizar" el problema, es decir, intentar ver cómo se mueven los elementos a medida que movemos el punto M sobre la circunferencia, tal como haría un programa como Geogebra.

Los siguientes tres elementos son N, como intersección de las rectas ($N = r \cap s$), la recta horizontal que pasa por M, y la vertical que pasa por N:



Analíticamente, necesitamos las coordenadas de N para la recta vertical. La horizontal la tenemos ya:

$$\boxed{r_v \equiv x_N \qquad r_h \equiv y = y_0}$$

Con esto, tenemos todos los elementos para afrontar el problema. Recordemos que el objetivo es determinar una relación entre las coordenadas x e y del punto $P(x,y)$, intersección de las dos rectas anteriores, que puede quedar en función del valor a, pero de ningún otro parámetro más. Hasta aquí, tenemos:

$$\begin{cases} s \equiv y = 2a \\ c \equiv x^2 + (y-2a)^2 = a^2 \\ r \equiv y = \dfrac{y_0}{x_0}x \\ M(x_0, y_0), \qquad M \in c \\ r_v \equiv x_N, \qquad N = r \cap s \\ r_h \equiv y = y_0 \\ P = r_v \cap r_h \end{cases}$$

Nótese que la dificultad del problema es dominar toda esta cantidad de información a la vez. Empezaremos por calcular las coordenadas de N:

$$N = r \cap s \Rightarrow 2a = \frac{y_0}{x_0}x \Rightarrow \boxed{N\left(\frac{2ax_0}{y_0}, 2a\right)}$$

Con esto, ya tenemos la recta vertical:

$$r_v \equiv x = \frac{2ax_0}{y_0}$$

Y dado que el punto P es la intersección de las rectas horizontal y vertical:

$$P(x,y) = r_v \cap r_h = \begin{cases} x = \dfrac{2ax_0}{y_0} \\ y = y_0 \end{cases} \rightarrow \boxed{P(x,y) = \left(\frac{2ax_0}{y_0}, y_0\right)}$$

Recordemos que nuestro objetivo es buscar una relación entre x e y, así que:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2ax_0}{y_0} \\ y = y_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2ax_0}{y}}$$

En esta última expresión, hemos eliminado el parámetro y_0. Solo nos queda x_0. Para ello, y dado que $M \in c$, sabemos que:

$$x_0^2 + (y_0 - a)^2 = a^2 \Rightarrow x_0 = \sqrt{a^2 - (y-a)^2} \Rightarrow x_0 = \sqrt{2ay - y^2}$$

Donde hemos sustituido $y = y_0$ en el último paso. Con esto:

$$x = \frac{2ax_0}{y} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2a\sqrt{2ay - y^2}}{y}}$$

Que es la expresión de la curva. Ahora, es más conveniente expresarla de una forma más elegante, como en su forma implícita: $F(x,y) = 0$. Para ello:

$$xy = 2a\sqrt{2ay - y^2} \Rightarrow x^2y^2 = 4a^2(2ay - y^2) \Rightarrow \boxed{\boxed{x^2y^2 + 4a^2y^2 - 8a^3y = 0}}$$

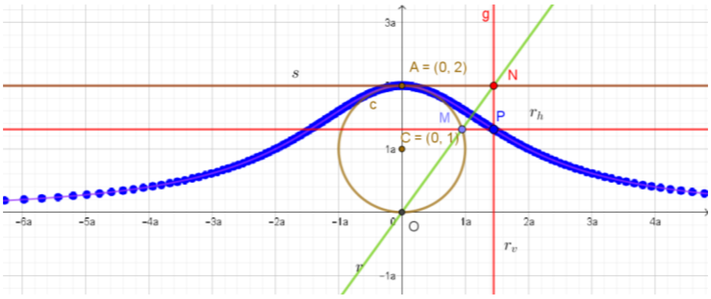
Con esto, podríamos dar por finalizado el problema. Ahora, para el siguiente apartado, es conveniente buscar una forma más cómoda de expresar esta curva. Notamos que podemos sacar y factor común y, dado que la curva no siempre anulará esta coordenada, llegamos a:

$$x^2y+4a^2y-8a^3=0$$

Pero, tal como está expresada, podemos despejar directamente y, de forma que:

$$y(x^2+4a^2)=8a^3 \Rightarrow \boxed{y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}}$$

El problema no lo pide, pero si dibujásemos la curva, quedaría lo siguiente. Puedes ver el geogebra en el qr adjunto, pulsando o escaneándolo:



Apartado b. Para calcular el área, existen varias técnicas, partiendo de la ecuación implícita, como parametrizarla, o cambiar a coordenadas polares. No obstante, en este caso, resulta especialmente sencillo, pues podemos despejar y en función de x, por lo que, dado que la función siempre es positiva (no hay más que ver que el denominador nunca se anula), podemos recurrir a la teoría básica de integración de Bachillerato.

Vemos, a su vez, que la curva es simétrica (par), por lo que podemos calcular la mitad derecha de la misma y multiplicar por dos:

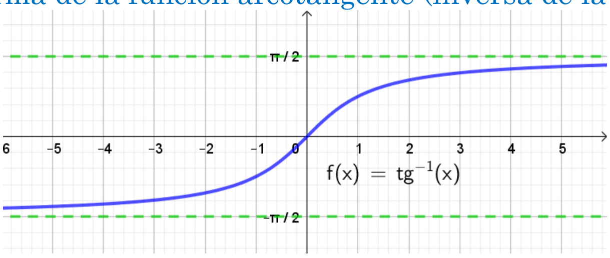
$$A=\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot dx=2\int_0^{\infty}\frac{8a^3}{x^2+4a^2}dx$$

Esta integral es, claramente, de tipo arcotangente, así que:

$$A=16a^3\int_0^{\infty}\frac{\frac{1}{4a^2}}{\left(\frac{x}{2a}\right)^2+1}dx=4a\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{x}{2a}\right)^2+1}dx=8a^2\int_0^{\infty}\frac{\frac{1}{2a}}{\left(\frac{x}{2a}\right)^2+1}dx$$

$$=8a^2\left[arctg\left(\frac{x}{2a}\right)\right]_0^{\infty}=8a^2\left[\lim_{n\to\infty} arctg\left(\frac{n}{2a}\right)-arctg 0\right]$$

Recordemos que la forma de la función arcotangente (inversa de la tangente), es:



En el límite, tiende a $\frac{\pi}{2}$. Así pues, el área queda:

$$A=8a^2\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\Rightarrow \boxed{A=4\pi a^2\ u^2}$$

NOTA: en la sección de metodología didáctica, en Vimat mostramos muchas cosas, entre ellas un juego de cartas para los alumnos, confeccionado manualmente. Para explicar dicha confección, creamos algunas cartas para que los alumnos de Vimat las tengan.

Este año, tocaba María Gaetana Agnesi quien, entre muchas otras cosas, creó la curva de Agnesi, que es justo lo que propone este problema. En el QR de la carta, que puedes ver aquí, se muestra un artículo sobre por qué se llamó a esta curva la "curva de la bruja de Agnesi", que tiene que ver con una mala traducción del italiano.

María Agnesi, como otras tantas mujeres en la historia, quedó relegada a un segundo plano. Por eso es tan importante (y así lo recogen las leyes educativas), que se ponga de relevancia a tantas y tantas mujeres que han trabajado no solo en matemáticas, sino en todos los campos, y que los alumnos crezcan con una mentalidad que, por desgracia, a veces falla en nuestra sociedad.

3	**(2 p.)** Un hombre acude a un banco para cobrar un cheque por valor de E euros y C céntimos. El cajero, por error, la entrega un sobre con C euros y E céntimos. El cliente no se da cuenta del error hasta que gasta 23 céntimos y, además, observa que en ese momento tiene 2E euros y 2C céntimos. ¿cúal es el valor del cheque?

Solución:

Para resolver este ejercicio vamos a plantearlo y en que punto nos debemos dar cuenta de que es una ecuación diofántica, lo primero que nos debemos plantear es como utilizar los euros y los céntimos en una ecuación, y sin más, lo haremos utilizando su conversión

La ecuación que nos plantea es:

$$\mathbf{100C + E - 23 = 200E + 2C}$$

Despejando nos queda la ecuación diofántica:

$$98C - 199E = 23$$

Obervamos que $mcd(98,199) = 1$, y, por tanto, como 1 divide a 23 tiene solución.

Utilicemos el procedimiento general para resolver ecuaciones diofánticas de este tipo, con divisiones sucesivas:

$$199 = 92 \cdot 2 + 3$$

$$98 = 3 \cdot 32 + 2$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

Así:

$$1 = 3 - 2 = 3 - (98 - 3 \cdot 32) = 3 \cdot 33 - 98 = (199 - 2 \cdot 99) \cdot 33 - 98 = 33 \cdot 199 - 67 \cdot 98$$

Y ya hemos encontrado la solución para llegar hasta el 1 con el 98 y 199, para llegar al 23, multiplicaremos por 23:

Y una solución particular será $\begin{cases} C_0 = -67 \cdot 23 = -1541 \\ E_0 = -33 \cdot 23 = -759 \end{cases}$

Así todas las soluciones enteras de esa ecuación diofántica serían:

$$\begin{cases} C = -1541 - 199t \\ E = -759 - 98t \end{cases} \quad t \in \mathbb{N}$$

Como C y E tienen que ser números naturales y C tiene que ser menor que 100,

$$-1541 - 199t > 0$$

$$-7{,}74 > t$$

$$-8 > t$$

Así, para $t = -8$ se vuelven positivos, el valor a utilizar despejando t en la primera ecuación

Así $E = 25$ y $C = 51$, habría más soluciones pero ninguna de ellas con $C < 100$

Por tanto, el cheque con el que el hombre acude al banco era de 25 euros y 51 céntimos.

4 **(2,5 p.)** Dado el determinante de orden n

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 3 & .. & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 3 & .. & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & .. & 3 & 3 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 3 & 3 & 3 & .. & 8 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & .. & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

Se pide:

a) (1,5 p.) Calcular su valor.
b) (1 p.) Determina para qué valores de n dicho valor el múltiplo de 10

Solución:

a) Al intentar resolver el determinante vemos que la suma de las filas y las columnas es constante luego lo intentaremos resolver sumemos todas las filas y sustituyéndolo por la primera fila.
Llamemos al determinante pedido D_n puesto que depende del número de filas y columnas

$$D_n = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 3 & .. & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 3 & .. & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & .. & 3 & 3 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 3 & 3 & 3 & .. & 8 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & .. & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 8+3(n-1) & 8+3(n-1) & 8+3(n-1) & .. & 38+3(n-1) & 8+3(n-1) \\ 3 & 8 & 3 & .. & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & .. & 3 & 3 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 3 & 3 & 3 & .. & 8 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & .. & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{Sacando \\ factor\ común}}{=} (8+3(n-1)) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & .. & 1 & 1 \\ 3 & 8 & 3 & .. & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & .. & 3 & 3 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 3 & 3 & 3 & .. & 8 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & .. & 3 & 8 \end{vmatrix} \overset{\substack{Restando \\ todas\ las\ col. \\ a\ la\ 1^a}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & .. & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 3 & 0 & 0 & .. & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & .. & 0 & 5 \end{vmatrix} = (8+3(n-1))5^{n-1}$$

Como en todo el proceso no hemos tenido en cuenta n, no hace falta probarlo por inducción.

b) Para resolver el segundo apartado, fijémonos que nos pide que sea múltiplo de 10 y no potencia de 10 lo que complicaría un poco más el ejercicio.

Observemos que los primeros determinantes son:

$$D_1 = 8, \quad D_2 = 55 \quad D_3 = 350 \quad D_4 = 2125 \quad y\ D_5 = 12500$$

Ahí vemos que hay dos que sí lo son, como nos pregunta por múltiplos utilicemos congruencias para resolverlo.

$$\big(8 + 3(n-1)\big) \cdot 5^{n-1} \equiv 0(mod 10)$$

5 elevado a cualquier potencia es congruente con $5(mod 10)$

$$\big(8 + 3(n-1)\big) \cdot 5 \equiv 0(mod 10)$$

$$40 + 15(n-1) \equiv 0(mod 10)$$

$$5(n-1) \equiv 0(mod 10)$$

Que se cumplirá siempre que:

$$n - 1 \equiv 0(mod 2)$$

$$n \equiv 1(mod 2)$$

Es decir, para todos los impares, pero observemos que en el 1 no se cumple por su carácter especial de que no incluye ningún factor 5, así la solución es:

$$n \equiv 1(mod 2)\ con\ n > 1$$