## Manual Geogebra S1. Elementos geométricos

Geogebra es una aplicación para trabajar la geometría, aunque su uso puede ir mucho más allá en cursos posteriores.



En este manual nos ocuparemos de los siguientes elementos:

Puntos
Rectas y semirrectas
Ángulos
Circunferencia y círculo
Mediatriz
Bisectriz
Mediana

Este manual está optimizado para PC, pero funciona prácticamente igual en otras plataformas, como iPad, salvo algunas pequeñas diferencias. Por ejemplo, cada vez que se dice "pulsa botón derecho", el gesto en iPad es dejar pulsado. Verás recuadros de vez en cuando con cosas que hay que hacer, pero DEBES LEER TODO EL MANUAL, sin saltarte nada.



Empecemos por un paso que, si bien es voluntario (no es necesario hacerlo), puede venirte bien en un futuro: crear una sesión en geogebra.

Las casillas de la izquierda de las tablas sirven para marcar con una X cuando la hayas completado. Cuando veas una tabla en verde, es porque te toca hacer lo que dice. Por ejemplo, hemos dejado la primera de la siguiente tabla marcada, como si lo hubiésemos hecho (de hecho, ve haciéndolo):

Х	Abre Geogebra
	Pulsa, arriba a la derecha, en "Abrir sesión"
	Crea una cuenta en Geogebra de cero, o bien desde Google u otros. Una
	vez hecho, deberías ver arriba a la derecha "Sesión abierta como Víctor",
	y se te permitirá el acceso a GeogebraTube, donde podrás ver cosas que
	la gente ha hecho en internet, así como guardar tus proyectos en la nube.

Las versiones de Geogebra van cambiando, así que es posible que algunas cosas las veas ligeramente distintas a este manual. No obstante, todo será muy similar.

#### 1. <u>Elementos básicos. Puntos</u>

Empecemos por dibujar un punto.



Por último, vamos a colocar un punto D, pero este en un lugar determinado. Para ello, ve a la barra de entrada, abajo, y escribe: D = (2,3)
Pulsa INTRO. El punto debería colocarse donde has indicado exactamente, también pintado de azul.
Ahora vamos a mover los puntos. Para ello, deberás elegir la flecha en el menú primero, y luego mover los puntos.
Fíjate la importancia de los colores en Geogebra. Azul significa que el punto es totalmente libre: puedes moverlo como y donde quieras. Sin embargo, gris indica que el punto tiene alguna restricción. Por ejemplo, los puntos que has colocado en los ejes siempre estarán en los ejes, aunque podrás moverlos en horizontal y vertical respectivamente.

#### 2. <u>Elementos básicos. Rectas</u>

Con los puntos tal como los tienes, vamos a dibujar algunas rectas. Aprovecharemos esos puntos para definirlas. Pintaremos de azul los cuadros donde haya definiciones:

Una **recta** es una sucesión ordenada e infinita de puntos en la misma dirección, de forma que entre dos cualesquiera de sus puntos, la distancia siempre es mínima.

La definición anterior resulta muy interesante. Intenta comprenderla. La idea de una recta está precisamente en que, escogiendo dos puntos cualesquiera, la distancia es mínima entre ellos. Esto no ocurre, por ejemplo, en una circunferencia.

Obviamente, **las rectas son infinitas**. Se extienden a ambos lados indefinidamente, aunque solo veamos una parte. Puedes usar el zoom de geogebra para comprobarlo.

Se define una **semirrecta** como una recta que se define desde un punto determinado (tiene inicio, pero no final). Se define **segmento** como la línea recta que une dos puntos (tiene inicio y tiene final)



Nota: fíjate que en los dibujos anteriores, no aparece la cuadrícula de fondo. En las primeras versiones de geogebra, esta venía desactivada por defecto. En estas primeras prácticas, no necesitamos la cuadrícula, aunque no está tampoco mal dejarla. Si quieres activar o desactivar la cuadrícula, simplemente pulsa con el botón derecho (asegúrate de tener seleccionada la flecha) sobre el fondo, y pulsa **cuadrícula**. Lo mismo para dejar o quitar los ejes. Una vez trabajado con los elementos más básicos, pasemos a rectas paralelas y perpendiculares.

Se dice que dos rectas son <b>paralelas</b> si nunca se cortan.
Se dice que dos rectas son perpendiculares si, al cortarse, forman cuatro
ángulos de 90° (rectos)

Vamos a seguir dibujando rectas. Ve ahora a la herramienta que está a la derecha de las rectas básicas (ver el cuadro más adelante si no lo encuentras)

Fíjate bien en el primer icono, pues da mucha información: está indicando que vas a dibujar una recta perpendicular a otra, que pasa por un punto. La recta que aparece en negro en el dibujo es la que ya tienes que tener dibujada. El punto puedes tenerlo, o bien colocarlo donde tú quieras. La recta roja es la recta que aparecerá.



Fíjate que no nos debería importar demasiado dónde está cada elemento. De hecho, lo que queda por hacer es seleccionar la flecha, y comprobar qué ocurre al mover los elementos:

Con la flecha seleccionada, prueba a mover los puntos A, B, C y D. Comprueba que las rectas se mueven.

Comprueba que la recta paralela sigue siendo siempre paralela a AC, y que la recta perpendicular siempre es perpendicular a AC, sin importar qué puntos muevas ni donde los muevas.

Por último, es momento de guardar el archivo y enviarlo, en el formato que se indique. Pintaremos este cuadro final en amarillo, indicando el final de la práctica.

Par ello, ve al menú, arriba a la izquierda, pulsa ARCHIVO y GUARDAR COMO. Selecciona dónde guardar el archivo, y adjúntalo a la tarea que se muestre.

En iPad, posiblemente tengas que pulsar sobre **exportar**, para abrirlo en la aplicación correspondiente (correo Gmail, classroom, edmodo, etc.) Si estás con iPad, no olvides darle a **guardar**, aunque recuerda que para ello antes debes estar registrado en Geogebra y tener abierta la sesión.

Corrección. Esta es la rúbrica de la corrección del trabajo, que puedes hacer tú mismo. Por supuesto, deben estar todos los elementos anteriores, convenientemente pintados y cambiados de estilo y, además:

- Al mover los puntos B y C siguen estando en los ejes.
- Al mover B, C o A, la recta perpendicular sigue siendo perpendicular.
- Al mover B, C o D, la recta paralela sigue siendo paralela.

Antes de acabar, algunas cosas interesantes.

- Fíjate en la barra de elementos de la izquierda. Si quieres borrar algún objeto, lo más sencillo es hacerlo desde ahí, pues en la vista gráfica hay veces que hay varios objetos uno encima de otro, y podrías borrar el que no quieres. Lo mismo para pintarlos o cambiarlos. Pulsando con el botón derecho encima de los objetos en esta barra, hace el mismo efecto que pulsando sobre el propio objeto.
- Una opción interesante es ocultar los objetos. Para ello, puedes pulsar con el botón derecho, y seleccionar mostrar el objeto, o bien simplemente pulsando la "bolita" que aparece a la izquierda en el menú algebraico de la



izquierda. Prueba a ocultar y volver a mostrar algunos objetos.

## 3. <u>Ángulos</u>

Abre un nuevo documento de geogebra. Vamos a estudiar ángulos:

**Ángulo**: porción de plano limitada por dos rectas (semirrectas) que parten del mismo punto.

Vamos a hacer lo siguiente:

Dibuja al azar los puntos A, B, C, D, E (cinco puntos en total).
Si quieres, puedes colocar alguno sobre los ejes.
Busca ahora la herramienta ángulo:
Fíjate que el propio dibujo te está pidiendo tres puntos. Marca esta
herramienta, y pulsa sobre los puntos A, B y C.
Es muy importante que te des cuenta de que si hubiésemos pulsado en
BCA sería un ángulo distinto, lo mismo que pulsando CBA o CAB.
Tenemos ya el ángulo α
Ahora usaremos la segunda herramienta, que nos permite seleccionar
dos puntos (marcados en azul), y para el tercero, introduciremos el
ángulo que queramos. Usando esta herramienta, pulsa sobre D y E, y
cuando aparezca una ventana pide que haga un ángulo de 30º.
Prueba a mover ahora los puntos. Verás que A, B, C, D y E se mueven
sin problemas. Sin embargo, el nuevo punto no puede moverse, pues
depende de todo lo anterior. Muevas como muevas D y E siempre habrá
30° con este segmento y el que une al punto nuevo, que es <b>fijo</b> .
Utiliza segmentos de colores para marcar bien los ángulos, uniendo AB
por un lado, BC por otro (estos dos en un color), y por otro lado DE y D'E
(en otro color distinto).
Cambia el tamaño del ángulo para que se vea bien.

Guarda el archivo y manda la tarea correspondiente.

#### Corrección.

Además de que todo esté convenientemente colocado, pintado en colores, y cambiado el estilo, se debe cumplir:

- Al mover los puntos A, B o C, el ángulo se mantiene entre ellos y cambia.
- Al mover los puntos D o E, el punto D' cambia, de forma que siempre haya 30°.

#### 4. <u>Circunferencias</u>

Abre un nuevo documento de geogebra. Vamos a dibujar la siguiente figura geométrica más simple, después de las rectas: la circunferencia. Tenemos varias opciones para ello:



Vamos a hacer, por tanto, cuatro circunferencias. Para ello:

Empecemos por dibujar los elementos que nos hacen falta. Lo primero es colocar, aleatoriamente, 9 puntos, que se llamarán A, B, C, D, E, F, G, H e I. No importa donde los coloques, luego puedes moverlo para que
 todo quede claro.
A continuación, utilizaremos la herramienta segmento para unir los
puntos H y I, creando así el segmento que llamaremos de forma poco
original HI.
Ahora crearemos la primera circunferencia. Para ello pulsa en el primer
icono de circunferencia (circunferencia dado el centro y un punto), y
marca el punto A como centro, y el punto B como destino.
Creemos ahora la segunda circunferencia (segunda herramienta). Esta
nos pide el centro y el radio (que introducimos manualmente). Pulsa
sobre esta herramienta, y luego marca el punto C como centro.
Aparecerá una ventana para indicar el radio. Introduce 5 unidades y
pulsa OK. Ya tenemos la segunda.
Vayamos a la tercera herramienta. Esta nos pide un centro y un
segmento aparte, que será el radio. Pulsa en esta herramienta, pulsa
sobre el segmento HI que hemos creado antes, y luego pulsa D como
centro. Ya tenemos la tercera.

Por último, pulsa en la herramienta que aparece una circunferencia con tres puntos. Al igual que con dos puntos es suficiente para crear una recta, son necesarios tres para la circunferencia. Una vez pulsada la herramienta, pulsa sobre los puntos E, F y G. Ya tenemos la cuarta circunferencia.

Ahora, mueve los puntos para que las cuatro circunferencias se vean bien, y colorea cada una de un color distinto, cambiando el aspecto para que se vean bien.

Puedes ponerle relleno a las circunferencias, pero de esta forma, estarás creando **círculos**. Es el momento oportuno para distinguir entre una cosa y otra. La circunferencia es la línea que rodea al círculo. Por eso la **longitud de la circunferencia** es  $L = 2\pi R$ , y se mide en metros (es una línea), y el **área del círculo** es  $A = \pi R^2$ , y se mide en  $m^2$ .

Puedes pedirle a Geogebra que señale la longitud y el área de la figura. Para ello, busca la opción **longitud** y **área** en la casilla de los ángulos:



Marca la primera opción, y pulsa sobre las cuatro circunferencias.

Marca ahora la segunda opción, y pulsa también sobre las circunferencias (puedes hacerlo en el dibujo o en el listado de la izquierda).

NOTA: no existe el área de la circunferencia ni la longitud del círculo como tal. Estrictamente hablando, existe el área del círculo interior a la circunferencia, y la longitud del perímetro del círculo. En resumen: la circunferencia tiene longitud, y el círculo tiene área.

Guarda el archivo y manda la tarea correspondiente.

#### Corrección.

Además de que todo esté convenientemente colocado, pintado en colores, y cambiado el estilo, se debe cumplir:

- Al mover el punto A se mueve el centro de la primera circunferencia. Al mover el punto B la primera circunferencia se hace mayor o menor, sin cambiar el centro.
- Al mover el punto C, la segunda circunferencia cambia de sitio, pero mantiene el mismo radio, de 5 unidades.
- Al mover el punto D, la tercera circunferencia cambia de sitio, sin cambiar el radio. Pero, al mover los puntos H o I del segmento, debe cambiar de igual forma el radio de la tercera circunferencia.
- Al mover los puntos E, F o G, la cuarta circunferencia cambia.
- Deben aparecer la longitud y área de cada cirunferencia/círculo.

### 5. <u>Resto de elementos geométricos</u>

A continuación, vamos a trabajar con triángulos y la herramienta "polígonos". Intentaremos crear **mediatrices, medianas, alturas y bisectrices**, basándonos en las ideas anteriores.

Abre un nuevo documento de geogebra.





Vamos con algunas definiciones:

Segmento (otra definición): parte de una recta comprendida entre dos puntos. Mediatriz: recta perpendicular a un segmento, que pasa por su punto medio.

Hay dos formas de crear la mediatriz de un segmento. La primera es hacerlo con la herramienta "mediatriz". La segunda, es hacerlo a mano, más laboriosa, pero aprendes más. Elige la forma que más te guste:

Forma 1	Forma 2	
Más fácil, menos aprendes	Más difícil, pero sabes lo que haces	
Pulsa en la herramienta "rectas": iPad = $\land A = (0.96, 2.82)$ $\bigcirc A = (2.26, 2.44)$ $\bigcirc C = (6.2, 3.6)$ $\bigcirc D = (8.14, 2.34)$ $\bigcirc F = (1.44, -2.18)$ $\bigcirc G = (4.3, -2.16)$ $\bigcirc A = (0.96, 2.82)$ $\bigcirc Perpendicular$ $\bigcirc Paralela$ $\bigcirc Tangentes$	<ul> <li>Busca la herramienta "punto medio", que se encuentra en el segundo menú, donde los puntos.</li> <li>Pulsa sobre el segmento AB directamente, o bien primero sobre el punto A y luego sobre el B. Se creará el punto medio.</li> <li>Busca la herramienta de recta perpendicular (ya deberías saber dónde está), y marca primero el segmento AB (cuidado, no pulses encima del punto medio), y luego sobre el punto medio.</li> </ul>	
Selecciona Mediatriz. Fíjate en el dibujo. Te pide simplemente que le señales un segmento	La mediatriz esta creada.	
Pulsa sobre el segmento AB         (bien encima del segmento, bien		

en la parte izquierda donde están todos los elementos, o bien		
pulsando primero en A y luego en B). La mediatriz está creada.		
En ambos casos, colorea el segmer para las dos. Cambia el estilo de para distinguirla del segmento, y	nto y la amj	v su mediatriz. Usa el mismo color mediatriz a un trazo discontinuo plía el grosor de ambas.

Pasamos a la siguiente:

Mediana: en un triángulo, es la recta que une el **punto medio** de un lado con el **vértice opuesto**.

Aquí no tenemos más remedio que hacerlo paso a paso, pues no existe (al menos en esta versión), una herramienta "mediana".





#### Sigamos.

Altura: en un triángulo, es la recta perpendicular a un lado que pasa por el **vértice opuesto**.

De nuevo, no queda más remedio que hacerla a mano.

Nos fijaremos en el triángulo FGH. Buscamos la herramienta <b>recta</b> <b>perpendicular</b> (ya deberías saber dónde está)
Pulsa sobre el segmento GH para indicar que la perpendicular será
respecto a este segmento, y luego pulsa sobre el punto F. Ya está creada
la altura:
G g f
Colorea la altura de un color distinto a los de antes. Cambia el estilo de
la altura a un trazo discontinuo, y amplía su grosor.

Bisectriz: recta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales.

Nos fijaremos en el último triángulo FGH (aunque en realidad habría bastado con un par de rectas que se crucen). Buscamos la herramienta **bisectriz** (que está donde las perpendiculares y paralelas)

Para hacer una bisectriz, tenemos que indicar los dos lados del ángulo. En este caso, pulsaremos sobre el segmento IJ primero, y luego sobre JK. La bisectriz está creada.



Sin embargo, fíjate que se han creado dos. Esto es porque Geogebra entiende que estas dos rectas son infinitas, y por tanto existen dos bisectrices. Pero, como es un triángulo, sólo nos interesa una de ellas. Pulsando con el botón derecho, marca la opción "mostrar objeto" en la recta que no nos interesa, para ocultarla (**no la borres**). También puedes hacerlo con el círculo azul que aparece a la izquierda, donde están todos los elementos.

Colorea la bisectriz de un color distinto a los de antes. Cambia el estilo de la bisectriz a un trazo discontinuo, y amplía su grosor.

Guarda el archivo y manda la tarea correspondiente.

#### Corrección

Además de que esté todo, y se respeten los pasos en cuanto a colores, estilo discontinuo, y cambiar el grosor, debe cumplirse lo siguiente:

- Al mover los puntos A o B, la mediatriz debe seguir siendo la mediatriz.
- Al mover los puntos C, D o E, la mediana debe seguir pasando por el punto medio de CD y el punto E.
- Al mover los puntos F, G o H, la altura debe seguir siendo perpendicular a GH y pasando por F (no te preocupes si en ocasiones se "sale fuera" del triángulo, se sobreentiende que el segmento GH es una recta infinita).
- Al mover los puntos IJK, la bisectriz debe dividir al ángulo IJK siempre en dos partes iguales.

#### 6. <u>Rastro y animación</u>

Aunque no tiene que ver estrictamente con lo anterior, introduciremos aquí estas herramientas de geogebra.

Empezamos por la **intersección**, que es el lugar donde se cruzan dos figuras geométricas.

Abre un nuevo geogebra.

Dibuja dos circunferencias, C1 y C2, de cualquier forma, pero que se corten.
Pide a Geogebra que determine la intersección entre ellas, pulsando la herramienta <b>intersección</b> dentro de la herramienta "puntos":
. A 🔊 🔨 🔨
De esta forma, geogebra debe marcar dos puntos en las circunferencias. Se dice que estas circunferencias son <b>secantes</b> .
Dibuja otras dos circunferencias, C3 y C4, y repite los pasos anteriores. Ahora, colócalas de forma que sean <b>tangentes</b> , es decir, que solo tengan un punto de intersección (aproximadamente).
Por último, dibuja dos circunferencias más, C5 y C6, y repite los pasos anteriores. Sitúalas de forma que sean <b>exteriores</b> , es decir, que no se corten en ningún punto.
Pinta cada par de circunferencias de un color y cambia su estilo para ampliar el borde. Las circunferencias C1 y C2 deben quedar pintadas
de un color, la C3 y C4 de otro, y la C5 y C6 de otro.
Debajo de cada pareja, coloca un texto en que indique si son secantes,
tangentes o exteriores.

A esto que acabamos de hacer se le llama **posición relativa**, que es la posición de un objeto respecto a otro. Podemos hacer lo mismo con otros objetos.

En el mismo geogebra, dibuja tres circunferencias C7, C8, C9, y tres rectas R1, R2, R3.

Usa la herramienta **intersección** como antes para pedir a geogebra que calcule la intersección de C7 con R1, de C8 con R2, y de C9 con R3. De entrada, puede que existan dichos puntos o puede que no.

Ahora, mueve las circunferencias o las rectas de forma que C7 y R1 sean <b>secantes</b> , C8 y R2 sean tangentes (aproximadamente), y C9 y R3 sean exteriores.

Pinta cada par circunferencias-recta de un color y cambia su estilo para ampliar los bordes. Añade un texto debajo indicando la posición relativa.

Guarda el archivo y manda la tarea correspondiente.

#### Corrección

Además de que esté todo, y se respeten los pasos en cuanto a colores, estilo, y grosor, debe cumplirse lo siguiente:

Al mover aleatoriamente cada uno de los elementos, si se colocan en la posición apropiada, deben aparecer dos puntos de intersección (en todos ellos)

## 7. <u>Barra de entrada</u>

La barra de entrada de geogebra es posiblemente la herramienta más útil. De hecho, cuando aprendes suficientes cosas, llega a ser lo único que utilizas, olvidando los menús de arriba.

Crea un nuevo documento de geogebra.

En esta práctica vamos a hacer algo de álgebra básica con la barra de entrada.



## 8. <u>Deslizadores</u>

# No cambies de documento de geogebra, porque nos hará falta la barra de entrada para este.

Vamos a colocar un deslizador. Un deslizador es una especie de barra que indica el valor de una variable. Por ejemplo, la variable por defecto será *a*, con un valor inicial de cero. Si movemos el deslizador, *a* cambiará.

Pulsa sobre el deslizador y colócalo en algún sitio:
6- 5-
Prueba a mover el deslizador. El valor de <i>a</i> cambiará. Puedes cambiar
los parámetros de a haciendo click en él, aunque dejaremos eso para
más adelante.
Ahora vamos a crear varios puntos con la barra de entrada.
El primero de los puntos es un punto fijo. Escribe lo siguiente en la
barra de entrada:
A=(3,2)
Y pulsa intro. Verás como se crea el punto A en el punto (3,2).

Este punto no es fijo, por lo que aparece pintado en azul. Es decir, si
quieres, puedes moverlo.
Ahora, vamos a crear un punto B, que tenga por coordenada $x = 3$ , pero
por coordenada y tenga el valor de a. De esta forma, si $a = 1$ , el punto
será el (3,1), pero si $a = -3$ , el punto será (3,-3). Es decir, moviendo $a$ se
moverá el punto en vertical. Escribe lo siguiente en la barra de entrada
y pulsa intro:
B=(3,a)
Ahora, mueve a. ¿Qué ocurre?
Vamos a crear otros puntos más complicados. El primero será:
C = (a, a)
Escribe esto en la barra de entrada, y piensa qué puntos va a dar. Si
a = 1, será el punto (1,1), si $a = 2$ será el (2,2) piensa antes de mover
a qué característica tendrán todos esos puntos.
Vayamos un paso más allá, y escribamos en la barra de entrada:
$D = (a, a^2)$
(el símbolo ^ significa elevado a, es decir, al cuadrado).
Cuando ahora muevas a, estarás dibujando una <b>parábola</b> .
Por último, escribe en la barra de entrada:
E = (a, 1/a)
Donde el símbolo / es el de división, es decir, $\frac{1}{a}$ .
Al mover <i>a</i> , estarás dibujando una <b>hipérbola</b> .
Pinta cada punto de un color, y cambia su estilo de forma que uno sea
un círculo, otro un cuadrado, otro un aspa, etc.

El siguiente paso es activar el rastro y la animación. Sin necesidad de explicar mucho en qué consiste, sigue los siguientes pasos:

Pulsa con el botón derecho en cada punto que quieras (al menos dos), y selecciona "rastro". Esto dejará una marca cada vez que muevas dicho punto, como una mancha en el fondo.

Para borrar el rastro basta hacer zoom o cualquier otra cosa parecida.

Pulsa con el botón derecho en el deslizador, y selecciona "animación automática". ¿Qué ocurre?

Deja la animación puesta cuando grabes el archivo.

Guarda el archivo y manda la tarea correspondiente.

#### Corrección

Además de que esté todo, y se respeten los pasos en cuanto a colores, estilo, etc, debe cumplirse:

- El rastro está activado, así como la animación, formando las figuras que se indican.

