Simulacro 16/01/2020

1. **(And88/Gal89)** Sea $f(x)$ un polinomio de tercer grado con coeficientes reales que tiene sus tres raíces reales y distintas. Se considera la ecuación:
$$p(x) = f'(x)^2 - 2f(x) \cdot f''(x) = 0$$

   Se pide determinar el número de raíces reales de la ecuación $p(x) = 0$. Considerar también el caso en que $f(x)$ tenga una raíz real triple.

2. **(Madrid 2000 modificado)** Hallar razonadamente los números naturales que son iguales a la diferencia entre el cubo y el cuadrado de la suma de sus cifras. (Tomar congruencias y acotar el número máximo de cifras)

3. **(Madrid 1984)** Sean $a_0,\ b_0, c_0$ tres números reales dados. Se definen: $a_n, b_n\ y\ c_n$ por la relación de recurrencia siguiente:
$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$
$$b_n = b_{n-1} + c_{n-1}$$
$$c_n = c_{n-1}$$

   Demostrar que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. **(Canarias 1988 modificado).** Calcular cuántos números de 7 cifras se pueden formar con las cifras 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3.

   Halla la suma de todos ellos.

Solución

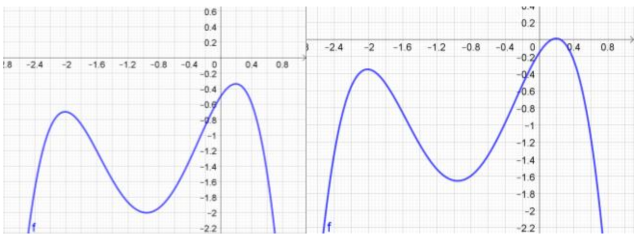
1. **(And88/Gal89)** Sea $f(x)$ un polinomio de tercer grado con coeficientes reales que tiene sus tres raíces reales y distintas. Se considera la ecuación:
$$p(x) = f'(x)^2 - 2f(x) \cdot f''(x) = 0$$
Se pide determinar el número de raíces reales de la ecuación $p(x) = 0$.
Considerar también el caso en que $f(x)$ tenga una raíz real triple.

Supongamos que la función tiene la forma:
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
Sustituimos en la ecuación, ya que:
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$
Por lo que:
$$p(x) = [3ax^2 + 2bx + c] - 2[ax^3 + bx^2 + cx + d] \cdot [6ax + 2b]$$

Sin embargo, esta forma de operar no llevará a ningún resultado. En cambio, podemos hacer:
$$p(x) = f'(x)^2 - 2f(x) \cdot f''(x)$$
De donde:
$$p'(x) = 2f'(x)f''(x) - 2f'(x)f''(x) - 2f(x)f'''(x) = -2f(x)f'''(x)$$
Con esto, y dado que $f'''(x) = 6a$, tenemos que:
$$p'(x) = -2f(x) \cdot 6a = -12af(x)$$
Así pues, las raíces de $f(x)$ coincidirán con las de $p'(x)$, es decir, los máximos o mínimos de la función $p(x)$ son las raíces de $f(x)$.

Vemos además que la función $p(x)$ puede desarrollarse como:
$$p(x) = -12a^2x^4 + \cdots$$
Lo que indica que $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = -\infty$.

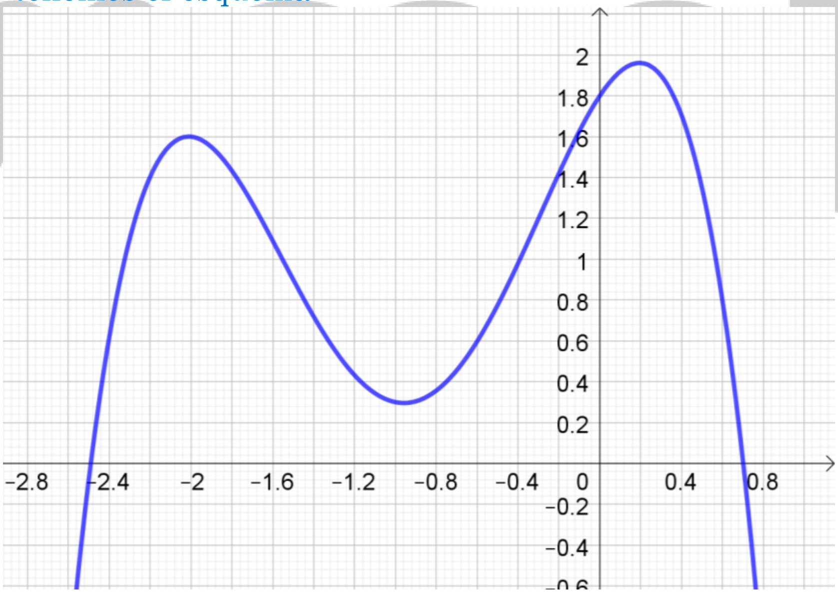
Con toda esta información llegamos a la conclusión de que $p(x)$ tiende a $-\infty$ en ambos lados, y que tiene tres extremos relativos, que llamaremos m_1, m_2, m_3. Claramente estos tienen que ser máximo, mínimo y máximo respectivamente, siguiendo el siguiente esquema:



Etc. Vemos en las gráficas anteriores los casos en que no hay solución y que hay una solución. De la misma forma podría haber dos soluciones, tres o cuatro.

Ahora bien, sustituyendo las tres raíces de $f(x)$ en $p(x)$ se tiene:
$$p(m_1) = f'(m_1)^2 - 2f(m_1)f''(m_1)$$
Dado que $f(m_1) = 0$, se tiene que:
$$p(m_1) = f'(m_1)^2 > 0$$
Lo mismo ocurre con las otras dos soluciones, luego en los tres puntos $p(m_i) > 0$.

Sabemos, pues, que tenemos el esquema:



De donde deducimos que la ecuación $p(x) = 0$ tiene exactamente dos soluciones.

Consideremos ahora el caso en que existiese una raíz triple en $f(x)$. En este caso:

$$f(x) = a(x - m_1)^3 \Rightarrow f'(x) = 3a(x - m_1)^2 \Rightarrow f''(x) = 6a(x - m_1) \Rightarrow f'''(x) = 6a$$

Al igual que antes, sustituimos en $p(x)$

$$p(x) = f'(x)^2 - 2f(x) \cdot f''(x) = [3a(x - m_1)^2]^2 - 2[a(x - m_1)^3][6a(x - m_1)]$$

De donde:

$$p(x) = 9a^2(x - m_1)^4 - 12a^2(x - m_1)^4 = -3a^2(x - m_1)^2$$

En cuyo caso, tenemos que $p(x) = 0$ solo tiene una solución, $x = m_1$, cuádruple.

2. (Madrid 2000 modificado) Hallar razonadamente los números naturales que son iguales a la diferencia entre el cubo y el cuadrado de la suma de sus cifras. (Tomar congruencias y acotar el número máximo de cifras)

Sea n el número buscado, entonces $n = s^3 - s^2 = s^2(s-1)$, lo que pretendemos ahora es simplificar el número de posibilidades para estos números.
Tomaremos congruencias módulo 9, recordando una propiedad que se cumple en congruencias módulo 9, y es que el cualquier número natural es congruente módulo 9 con la suma de sus cifras, a partir de ahí descartaremos muchas posibilidades:

Números mod9	s^2	$s^2(s-1)$
0	0	0
1	1	0
2	4	4
3	0	0
4	7	3
5	7	1
6	0	0
7	4	6
8	1	7

Como s tiene que ser congruente con n. Entonces la única posibilidad es que sea múltiplo de 9.

Ahora veamos la otra forma de acotar las posibilidades, a medida que un número es muy grande, no puede ser el sumo del cubo de sus cifras porque estos números serían muy pequeños, veamos como se comporta esta afirmación con los números más grandes en cuanto a cifras
$99 < 18^3$, $999 < 27^3$, $9999 < 36^3$, $99999 < 45^3$, pero de aquí en adelante $999999 > 54^3$,

y así sucesivamente, así que es imposible que ocurra que un número de 7 cifras cumpla esto, veamos como demostrarlo adecuadamente con notación matemática.

Descomponiendo el número polinomialmente, existirán a_j *tal que* $n = \sum_{j=0}^{m-1} a_j 10^j$, si el número tiene m cifras, así, $s = \sum_{j=0}^{m-1} a_j$, para que el número tenga m cifras, se tiene que cumplir que $a_{m-1} \neq 0$, y por tanto, $n > 10^{m-1}$, por otro lado, el máximo número que puede alcanzar la suma de las cifras es 9m, si el número fuera con todo 9, así entonces,

$$10^{m-1} < n = s^2(s-1) < s^3 < (9m)^3$$

Vemos que a partir de $m = 7$ esta desigualdad no se cumple, es decir, no es posible que sea un número de ese tipo, pero habría que demostrar por inducción que se cumple para todos a partir de este, para reducir el problema solo a este, así, supongamos que se cumple esta inecuación al revés para k, veamos que se cumple la misma inecuación para $k+1$.
Hipótesis de inducción: $10^{k-1} \geq (9k)^3$
Para poder utilizar la hipótesis de inducción, necesitamos compararlo multiplicando o dividiendo la hipótesis de inducción.

$$[9(k+1)]^3 = \frac{(9k)^3}{(9k)^3}[9(k+1)]^3 = (9k)^3\left[\frac{9(k+1)}{9k}\right]^3 = (9k)^3\left(\frac{k+1}{k}\right)^3 \leq 10^{k-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^3 < 10^{k-1}\cdot 2^3 < 10^k$$

Así pues, las posibilidades han quedado reducidas a las siguientes:

s	0	9	18	27	36	45	54
$s^2(s-1)$	0	648	5508	18954	45360	89100	154548
s	0	18	18	27	18	18	27

Solo coincide la suma con lo que debería ser en $0, 18\ y\ 27$, así, por tanto, solo los números 0, 5508 y 18954 son los posibles.

3. (Madrid 1984) Sean $a_0,\ b_0, c_0$ tres números reales dados. Se definen: $a_n, b_n\ y\ c_n$ por la relación de recurrencia siguiente:

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$
$$b_n = b_{n-1} + c_{n-1}$$
$$c_n = c_{n-1}$$

Demostrar que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.1 Calculemos A^n para comprobar cuanto sería:

$$\boldsymbol{A^2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^4} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que sigue el patrón siguiente $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Probemos por inducción que esa sería la matriz A^n

- Para $n = 1$ se cumple
- Supongamos que se cumple para n, veamos si se cumple para n+1

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \dfrac{n(n-1)}{2} + n \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, que efectivamente cumple con el patrón de A^n c.q.d.

Vemos que, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = A \cdot A \cdot \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \\ c_{n-2} \end{pmatrix} = A^2 \cdot \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \\ c_{n-2} \end{pmatrix} = A^2 \cdot A \begin{pmatrix} a_{n-3} \\ b_{n-3} \\ c_{n-3} \end{pmatrix} = A^3 \cdot \begin{pmatrix} a_{n-3} \\ b_{n-3} \\ c_{n-3} \end{pmatrix} =$

$= \cdots \ldots \ldots = A^n \cdot \begin{pmatrix} a_{n-n} \\ b_{n-n} \\ c_{n-n} \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$. c.q.d.

Utilizando lo probado en el apartado anterior, podemos deducirlo

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + nb_0 + \frac{n(n-1)}{2} c_0 \\ b_0 + nc_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\begin{cases} a_n = a_0 + nb_0 + \frac{n(n-1)}{2} c_0 \\ b_n = b_0 + nc_0 \\ c_n = c_0 \end{cases}$

4. (Canarias 1988 modificado). Calcular cuántos números de 7 cifras se pueden formar con las cifras 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3.
Halla la suma de todos ellos.

Solución: Lo primero que debemos ver es cuanto números hay y luego buscar una estrategia para sumarlos, como los números se repiten podemos verlo como permutaciones con repetición, así serán:
$PR_7^{1,1,2,3} = \frac{7!}{1!1!2!3!} = 420$ pero hay que quitar los números que comienzan por cero.

$$PR_6^{1,2,3} = \frac{6!}{1!\,2!\,3!} = 60$$

Por tanto, en total habrá $420 - 60 = 360$

Para hallar la suma de todos ellos, veamos cómo hacerlo, lo haremos teniendo en cuenta cual será la suma de todos los valores de las unidades de millón, centenas de millar, decenas de millar, unidades de millar, centenas, decenas y unidades.
En las centenas de millar por ejemplo habrá 60 números con un 0, 60 con un 1, 120 con un 2 y 180 con un 3, y por tanto, $0 \cdot 60 + 1 \cdot 60 + 2 \cdot 120 + 3 \cdot 180 = 840$. Así habrá 840 unidades de millón, 840 centenas de millar, ... , y 840 unidades, por tanto, la suma será

$$840(1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5 + 10^6) = 840 \cdot \frac{10^7 - 1}{10 - 1} = 933333240$$