1 (2.5 puntos) Hallar todas las raíces de la ecuación

$$z^3 - (8+i)z^2 + (24+4i)z - (24-6i) = 0$$

teniendo en cuenta que el producto de dos de ellas es $15 + 9i$.

Solución: Utilizando la tercera fórmula de Cardano-Vieta, siendo z_1, z_2 y z_3 las tres raíces:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 24 - 6i$$

Como el producto de dos de ellas es $15 + 9i$, supongamos que son z_1 y z_2, quedaría:

$$(15+9i) \cdot z_3 = 24 - 6i$$

$$z_3 = \frac{24-6i}{15+9i} = \frac{(24-6i)\cdot(15-9i)}{(15+9i)(15-9i)} = \frac{360-54-90i-216i}{225+81} = \frac{306-306i}{306} \Rightarrow \boxed{z_3 = 1-i}$$

Por Ruffini:

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & -8-i & 24+4i & -24+6i \\ 1-i & & 1-i & -9+5i & 24-6i \\ \hline & 1 & -7-2i & 15+9i & 0 \end{array}$$

Con la fórmula para resolver la ecuación de segundo grado quedaría:

$$z^2 - (7+2i)z + 15 + 9i = 0$$

$$z = \frac{(7+2i) \pm \sqrt{(7+2i)^2 - 60 - 36i}}{2} = \frac{(7+2i) \pm \sqrt{-15-8i}}{2}$$

Para calcular la raíz cuadrada, planteamos:

$$(a+bi)^2 = -15 - 8i \xrightarrow{\substack{\text{igualando} \\ \text{partes reales} \\ \text{e imaginarias}}} \begin{cases} a^2 - b^2 = -15 \\ 2ab = -8 \end{cases}$$

Despejando en la segunda ecuación $a = -\frac{4}{b}$

Sustituyendo en la primera ecuación: $\left(-\frac{4}{b}\right)^2 - b^2 = -15$

Y resolviendo esta ecuación: $16 - b^4 = -15b^2$ de donde resolviendo la ecuación bicuadrada queda:

$$b^2 = -1 \ o \ 16$$

Como b es un número real $b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4 \Rightarrow a = \pm 1$

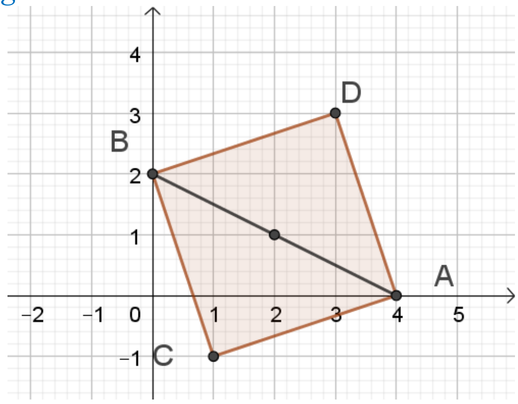
Luego las raíces cuadradas son $1 - 4i$ y $-1 + 4i$

$$z = \frac{(7+2i) \pm (1-4i)}{2}$$

Y resultan $\boxed{z_1 = 3+3i}$ y $\boxed{z_2 = 4-i}$

2	(2.5 puntos) Se dan los puntos $A(a,0)$ y $B(0,b)$, tales que $a+b=2d$ (d constante) Sobre AB como diagonal se construye un cuadrado cuyos otros vértices son C y D. Probar que al variar a y b, uno de estos vértices se mantiene fijo, y hallar el lugar geométrico determinado por el otro.

Solución: Este problema es el mismo que se puso en Mad88, hecho en las fichas de clase. El esquema es el siguiente:



Determinemos b en función de a:

$$b = 2d - a$$

Siendo d el parámetro que mueve el esquema.

El vector $\overrightarrow{AB} = (-a, b)$, por lo que el perpendicular será $\overrightarrow{AB_\perp} = (b, a)$. El punto medio entre A y B será:

$$M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

Para lograr el punto D, no tenemos más que sumar a M la mitad del vector perpendicular a AB, es decir:

$$D = M + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB_\perp}$$

Con esto:

$$D = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) + \frac{1}{2}(b,a) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$$

Lo mismo con el punto C, pero restando:

$$D = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) - \frac{1}{2}(b,a) = \left(\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$$

Coloquemos ambos puntos en función de d:

$$\boxed{\begin{cases} C = (d,d) \\ D = (d-b, b-d) \end{cases}}$$

Con esto, hemos demostrado que uno de los puntos se mantiene constante, mientras que el otro (D), depende de d. Veamos el lugar geométrico que sigue. Para ello:

$$D = (x,y) = (d-b, b-d)$$

Es decir:

$$\begin{cases} x = d-b \\ y = b-d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = d-x \\ b = y+d \end{cases} \Rightarrow d - x = y + d \Rightarrow \boxed{y = -x}$$

Es decir, el lugar geométrico es la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante.

2a	(1 punto) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que cumple las siguientes propiedades: $$f(x+y) = f(x)\cdot f(y), \qquad \forall x, y$$ $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = 1$$ Demostrar que $f(x)$ es derivable $\forall x \in \mathbb{R}$. Obtener una expresión explícita de la función $f(x)$.
	<u>Solución</u>: para que una función f sea derivable en un cierto punto $a \in \mathbb{R}$ debe cumplirse que exista el límite: $$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ Acudiendo a las propiedades de la función dada: $$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a)\cdot f(h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a)\cdot[f(h)-1]}{h} = f(a)\cdot \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}}_{1} = f(a)$$ De aquí obtenemos dos conclusiones. La primera, que efectivamente la función derivada existe $\forall a \in \mathbb{R}$. La segunda, que $f'(a) = f(a) \quad \forall x$, es decir, $f'(x) = f(x)$. Esto es una ecuación diferencial fácilmente resoluble: $$\frac{df(x)}{dx} = f(x) \Rightarrow \frac{df(x)}{f(x)} = dx \Rightarrow \ln\lvert f(x)\rvert = x + A \Rightarrow f(x) = e^{x+A} = Be^x$$ Donde hemos renombrado la constante A como $B = e^A$. Así pues, la función buscada es: $$\boxed{f(x) = Be^x}$$ Para que cumpla todos los preceptos del problema, debe cumplirse que: $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{Be^x - 1}{x} = 1 \underset{LH}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0}\frac{Be^x}{1} = 1 \Rightarrow \boxed{B = 1}$$ Por lo que la función buscada es: $$\boxed{\boxed{f(x) = e^x}}$$
	NOTA1: es sencillo probar que este resultado es correcto. De hecho se podría haber obtenido que $B = 1$ de esta primera propiedad, que dice que: $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$: $$Be^{x+y} \underset{?}{=} Be^x \cdot Be^y \Rightarrow Be^{x+y} = B^2 e^{x+y}$$ De donde $B = B^2$, cuya única solución, aparte de $B = 0$, es que $B = 1$. Nótese que podemos descartar el caso $B = 0$ por la segunda condición, ya que con $B = 0$ no se cumpliría que: $$\lim_{x\to 0}\frac{0-1}{x} \neq 1$$
	NOTA: como se menciona en el tema 22, la propiedad $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$, con algunas consideraciones adicionales, forma el **teorema de caracterización** de la función exponencial: <u>Teorema</u>: existe una única función no nula que cumple: $$f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$$ Tal que es continua, al menos, en un punto, y tal que $f(1) = a > 0$. Llamaremos **base** a este número. Además, se cumple que $f(0) = 1$. De la misma forma, una función $f(x\cdot y) = f(x) + f(y)$ forma la función logarítmica, con alguna consideración adicional.
3b	Demostrar que para todo número natural positivo n se verifica:

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$$

Nota: ln significa logaritmo neperiano

NOTA: este problema está resuelto de varias formas. Dado que las aportaciones de nuestros alumnos son importantes para nosotros, añadimos las iniciales de los que aportaron las ideas de algunas de ellas.

Solución 1

Este método no es difícil, pero se le tiene que ocurrir a uno acudir a los teoremas de continuidad. Aplicamos el teorema del valor medio a la función $f(x) = Lx$ en el intervalo $[n, n+1]$, que dice que existe un valor $c \in (n, n+1)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

En nuestro caso:

$$\frac{1}{c} = \frac{L(n+1) - L(n)}{n+1-n} \Rightarrow \frac{1}{c} = L(n+1) - L(n)$$

Con $c \in (n, n+1)$

Dado que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$, queda demostrado el enunciado.

Solución 2

Por AM

Una forma distinta de enfocar el problema es plantearlo como el análisis de funciones. Así, podemos despejar en la igualdad de la izquierda, de forma que:

$$0 < L(n+1) - L(n) - \frac{1}{n+1}$$

De igual forma, para la igualdad derecha:

$$L(n+1) - L(n) - \frac{1}{n} < 0$$

Comencemos con la primera inecuación. Colocamos el logaritmo en uno solo, y debemos analizar que la función es siempre positiva:

$$L\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} > 0$$

Definimos la función $f(x)$ como la extensión de la expresión anterior:

$$f(x) = L\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

Tomamos el mínimo valor de n (en este caso, de x), que es 1:

$$f(1) = L2 - \frac{1}{2} > 0$$

Por otro lado, el valor mayor es

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

Si demostramos que la función es monótona decreciente, habremos demostrado que esta función es estrictamente positiva. Para ello, hacemos uso de la derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{x-x-1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-(x+1)}{x(x+1)^2} + \frac{x}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$$

Por tanto, la función es estrictamente decreciente, con un valor inicial positivo y un valor final cero. Así pues, la función es estrictamente positiva, como se quería demostrar.

De la misma forma, podemos demostrar el lado contrario de la inecuación, pero en este caso al revés:

$$f(x) = L\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x}$$

Que debe ser estrictamente negativo. Comprobamos que $f(1) = L2 - 1 < 0$ y que, en el límite, la función tiende a cero. Por tanto, si demostramos que la función es estrictamente creciente, habremos completado la prueba:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{x-x-1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x+x+1}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)} > 0$$

Solución 3

Por CSG

Despejamos en la primera identidad, dado que $n+1>0$:

$$1 < (n+1)\ln\frac{n+1}{n}$$

Usando propiedades de logaritmos. Con esto, vemos que:

$$1 < \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

Que se parece mucho a una exponencial, en el límite en el infinito:

$$1 < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Podemos llevar esto a la forma exponencial, como:

$$1 < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot\frac{n+1}{n}}$$

De forma que, dado que esta sucesión es decreciente (esto debería demostrarse, calculando el valor de $a_{n+1} - a_n$ y comprobar que es siempre negativo):

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot\frac{n+1}{n}} > \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot\frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\ln e^{\frac{n+1}{n}} = \ln e = 1$$

De aquí, podemos deducir que:

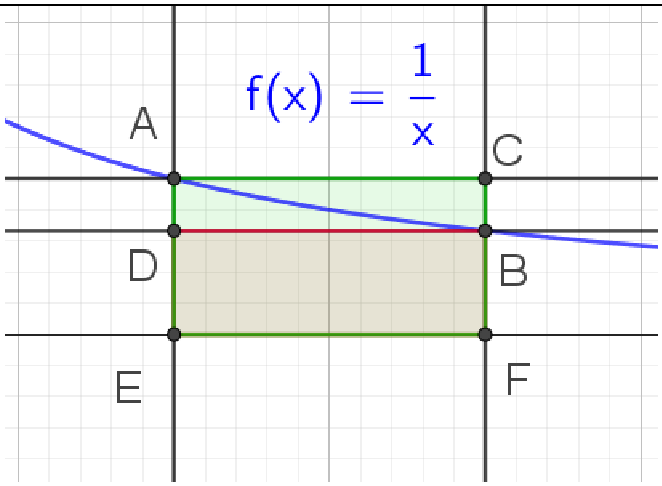
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot\frac{n+1}{n}} > 1$$

Como se pretendía demostrar.
De igual forma, se demuestra el lado derecho de la inecuación.

Solución 4

Vemos que, si consideramos la función auxiliar $g(x) = \frac{1}{x}$, se tiene que:

$$\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx = [\ln|x|]_n^{n+1} = \ln(n+1) - \ln n$$



El rectángulo superior tiene un área de $\big((n+1)-1\big)\cdot f(A) = 1\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$, que mayora el área. El restángulo inferior, por su parte, $\frac{1}{n+1}$. Por tanto, vemos que:

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$$

Como se quería demostrar.

3c	(0.75 puntos) Demostrar que para todo número natural positivo n se verifica: $$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)-1<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$
	Es muy frecuente que algunos problemas de oposición tengan relación entre ellos. Más, cuando son problemas concatenados como a, b, c, etc, dentro del mismo ejercicio global. Si acudimos al problema anterior, vemos que se cumple que: $$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$$ Sustituyamos n por los números enteros desde $n=1$ hasta $n+1$: $$\frac{1}{2}<\ln 2-\ln 1<\frac{1}{1}$$ $$\frac{1}{3}<\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2}$$ $$\frac{1}{4}<\ln 4-\ln 3<\frac{1}{3}$$ $$\cdots$$ $$\frac{1}{n}<\ln n-\ln(n-1)<\frac{1}{n-1}$$ $$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$$ Siempre es recomendable añadir la fila anterior, $n-1$. Si ahora sumamos todas estas desigualdades, actúan como una serie telescópica, cancelando los términos salvo unos pocos de ellos: $$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}<-\ln 1+\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$ Si sumamos y restamos 1 en el primer miembro (como dice el enunciado), y calculamos $\ln 1=0$, nos queda finalmente: $$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-1<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$ Como se quería demostrar.

4	Disponemos de $N+1$ urnas numeradas. Cada una contiene N bolas, rojas o blancas, de tal manera que la urna k contiene $k-1$ bolas blancas y $N-k+1$ bolas rojas $(k=1,2,\ldots,N+1)$. Escogemos una urna al azar y extraemos sucesivamente con reemplazamiento n bolas. a) Encontrar la probabilidad de que todas las bolas extraídas sean blancas. Calcular el límite de esta probabilidad cuando N tiende a infinito. b) Si hacemos una extracción más, encontrar la probabilidad de que la bola $n+1$ sea blanca, suponiendo que las n bolas escogidas con anterioridad eran blancas. Calcular el límite de esta probabilidad cuando N tiene a infinito.

Solución:

a) Sea E el espacio muestral de este experimento aleatorio.

Se trata de un experimento compuesto, primero elegir la urna, luego sacar una bola, luego otra, etc,…, compuesto de $n+1$ experimentos simples.

Sean los sucesos U_i: *"Elegir la urna i"* , $i=1,2,\ldots,N+1$

Sea el suceso B "las n bolas extraídas son blancas".

Todos los experimentos se modelizan con variables uniformes discretas:

Elegir una urna de $(N+1)$ es

$$\frac{1}{N+1}$$

Elegir una bola blanca de una urna con $k-1$ Blancas y $N-k+1$ negras es

$$\frac{k-1}{N}$$

Por el teorema de la probabilidad total (Tema 64):

$$p(B)=\sum_{k=1}^{N+1} p(U_i)\cdot p\left(\frac{B}{U_i}\right)=\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{N+1}\cdot\left(\frac{k-1}{N}\right)^n=\frac{1^n+2^n+\cdots N^n}{(N+1)\cdot N^n}$$

El límite será:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1^n+2^n+\cdots N^n}{(N+1)\cdot N^n}=\lim_{N\to\infty}\frac{N}{N+1}\cdot\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n\overset{Riemann}{=}\lim_{N\to\infty}\frac{N}{N+1}\cdot\int_0^1 x^n=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{N}{N+1}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

b) Planteemos el problema con una probabilidad condicionada directamente:
Sea el suceso B_{n+1}: "*La bola $n+1$ extraída es blanca*"

$$p(B_{n+1}/B) = \frac{p(B_{n+1} \cap B)}{P(B)} \overset{\substack{Fórmula \\ apartado\ a)}}{=} \frac{\dfrac{1^{n+1} + 2^{n+1} + \cdots N^{n+1}}{(N+1) \cdot N^{n+1}}}{\dfrac{1^n + 2^n + \cdots N^n}{(N+1) \cdot N^n}} = \frac{1^{n+1} + 2^{n+1} + \cdots N^{n+1}}{(1^n + 2^n + \cdots N^n) \cdot N}$$

Para el límite aplicando también el apartado a), nos quedaría:

$$\lim_{N\to\infty} p(B_{n+1}/B) = \frac{\dfrac{1}{n+2}}{\dfrac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$$