B0. Continuidad, derivabilidad y teoremas

1	Dada la función $f(x) = x^3 + 2x - 1$ probar que tiene sólo una raíz.
2	Dada la función $f(x) = senx + 3 + 2x$, probar que solo tiene un valor para el cual se anule la función.
3	Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Prueba que $f(1) = f(-1) = 0$, pero que $f'(x)$ no se anula nunca en el intervalo $[-1,1]$. Explica por qué este resultado no contradice el teorema de Rolle.
4	Demostrar que $e^x = 1 + x$ sólo admite una raíz real
5	Determinar el número exacto de soluciones de la ecuación $e^x = 2 + x$
6	Determinar el número de soluciones de la ecuación $e^x = k + x$ en términos del parámetro k.
7	Selectividad. 2000.1A. Sea $$f(x) = \begin{cases} \frac{senx}{x} + 2 & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$$ a) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$? b) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea derivable en $x = 0$? c) Determina sus asíntotas
8	Sea $$f(x) = \begin{cases} \frac{senx}{x} + 2x & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$$ a) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$? b) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea derivable en $x = 0$? c) Determina sus asíntotas
9	Demostrar que las funciones f y g definidas por: $$f(x) = arctg\left(\frac{1}{2x^2}\right), \quad x \neq 0$$ $$g(x) = arctg\left(\frac{x}{x+1}\right) - arctg\left(\frac{x-1}{x}\right), \quad x \neq 0, x \neq 1$$ Difieren, en todo punto distinto de 0 y -1, en una constante.
10	Sea f la función $f(x) = x\, arctg\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ Estudiar su continuidad y su derivabilidad. Hallar su derivada en los puntos en que esta exista y en los puntos en los que no exista, ver si existen alguna de las derivadas laterales.
11	Sea la función definida por $f(x) = x^{2n} sen\frac{1}{x}, n \in \mathbb{N}, f(0) = 0$ Demostrar que f es n veces derivable en el origen siendo la n-ésima derivada discontinua.
12	Sea $f(x) = \lvert x\rvert^{2n+1}$ para $n \in \mathbb{N}$ a) Demostrar que f es infinitamente derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ y que, sin embargo, sólo admite un número finito $k \in \mathbb{N}$ de derivadas en 0. b) ¿Es $f^{n)}(x)$ continua en 0?

Teoremas de continuidad

Teorema de Bolzano

Sea f una función real de variable real continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ con $f(a)$ y $f(b)$ de signos distintos. Entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$

Ejemplo: demuestra que la función $f(x) = x^2 - 4$ tiene una raíz en el intervalo $[0, 3]$

Según el teorema de Bolzano, vemos que $f(0) = -4 < 0$ y, por el contrario, $f(3) = 5 > 0$. Por tanto debe existir dicha raíz.

Sin aplicar el teorema de Bolzano, podemos directamente resolver la ecuación, de forma que $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$. Nótese que la solución -2 no es válida porque no pertenece al intervalo. Sí es válida la solución 2, que en este caso es única, aunque no tendría por qué serlo.

Este teorema se usa para funciones para las que no podemos, analíticamente, resolver la ecuación, como veremos en los ejercicios de la ficha.

Bernard Bolzano

1781-1848

Praga (Bohemia)

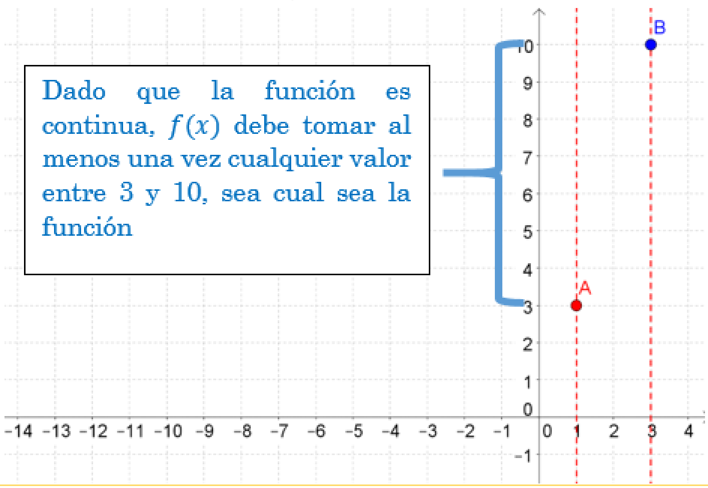
Teoremas de continuidad

Teorema de valor medio de Darboux

Sea f una función real de variable real continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. **Entonces existe al menos un punto** $c \in (a, b)$ **con** $f(c) \in (f(a), f(b))$

Este teorema realmente generaliza al teorema de Bolzano.

Vemos aquí una demostración gráfica



Jean-Gaston Darboux

1842-1917

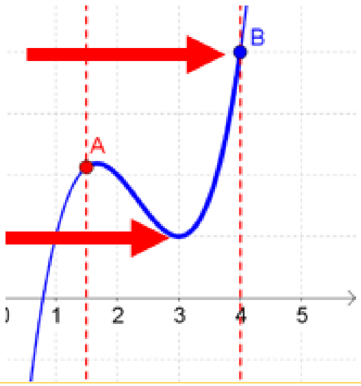
Nimes (Francia)

Teoremas de continuidad

Teorema de Weierstrass

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ entonces $f(x)$ alcanza al menos un máximo y un mínimo absolutos en dicho intervalo.

Una pequeña justificación gráfica podemos verla en el siguiente esquema.



Karl Weierstrass

1815-1897

Ostenfelde (Westfalia)

Teoremas de continuidad y derivabilidad

Teorema de Rolle

Sea f una función real de variable real continua en un intervalo cerrado **$[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$ entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$**

Ejemplo: demuestra que la función $f(x) = x^2 - x - 6$ tiene un máximo o mínimo en el intervalo $[-2, 3]$

Vemos que la función es claramente continua y derivable (en el intervalo dado, y en todo $\mathbb{R}$). Vemos que $f(-2) = f(3) = 0$.
Por tanto, según el teorema de Rolle, debe haber algún punto en el intervalo en que $f'(c) = 0$

Sin aplicar el teorema de Rolle, podemos directamente resolver la ecuación, de forma que $f'(x) = 2x - 1$, que igualando a cero llegamos a que $c = \frac{1}{2}$. Nótese que el punto pertenece al intervalo. En este caso es único, aunque no tendría por qué serlo.

Michel Rolle

1652-1719

París

Este teorema se usa para funciones para las que no podemos, analíticamente, resolver la ecuación, como veremos en los ejercicios de la ficha.

Teoremas de continuidad y derivabilidad

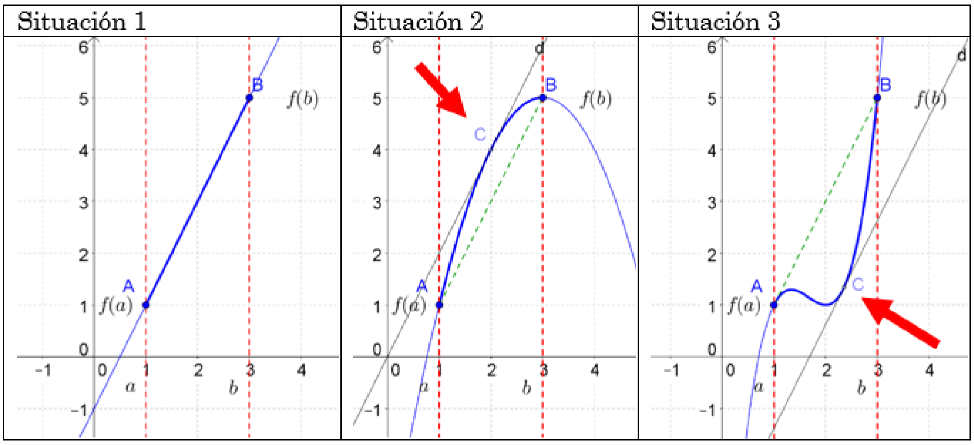
Teorema de los valores intermedios

Sea f una función real de variable real continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ **y derivable en** (a, b)**. Entonces existe al menos un punto** $c \in (a, b)$ **tal que**:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Este teorema generaliza al de Rolle. De hecho, se considera que este es el teorema de Rolle según la literatura consultada. Sea como sea, es obvio pasar de uno a otro, pues el teorema de Rolle antes mencionado establece que $f(a) = f(b)$, de donde es obvia la relación, llegando a $f'(c) = 0$

Una argumentación visual: unimos los puntos A y B de tres formas posibles:



Soluciones ficha B0. Continuidad, derivabilidad y teoremas

1 Dada la función $f(x) = x^3 + 2x - 1$ probar que tiene sólo una raíz.

Por el teorema de Bolzano, la función es continua y, además:

$$f(0) = -1 < 0$$
$$f(1) = 2 > 0$$

Por tanto se cumple que existe, al menos, un punto en $(0,1)$ tal que se anula la función:

$$\exists c \in (0,1) \mid f(c) = 0$$

Podemos ir más allá, viendo que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

Por tanto, existe al menos un punto $c \in \mathbb{R}$ en que $f(c) = 0$.

Acudimos ahora a la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 + 2$$

Dado que la derivada nunca se anula, la monotonía es constante, y en este caso en concreto positiva. Si la función es siempre creciente, es claro que el c que garantiza el teorema de Bolzano es único.

2 Dada la función $f(x) = senx + 3 + 2x$, probar que solo tiene un valor para el cual se anule la función.

Haciendo uso de Bolzano, se tiene que $f(0) = 3$, positivo, mientras que tomando por ejemplo $x = -10$, se tiene que $f(-10) = sen(-10) + 3 - 20 < 0$, sin importar el valor de $sen(-10)$, ya que como mucho puede ser -1.
Así pues, y dado que la función es continua, garantizamos que existe al menos un valor que hace que $f(c) = 0$.

Acudimos a la derivada:

$$f'(x) = cosx + 2$$

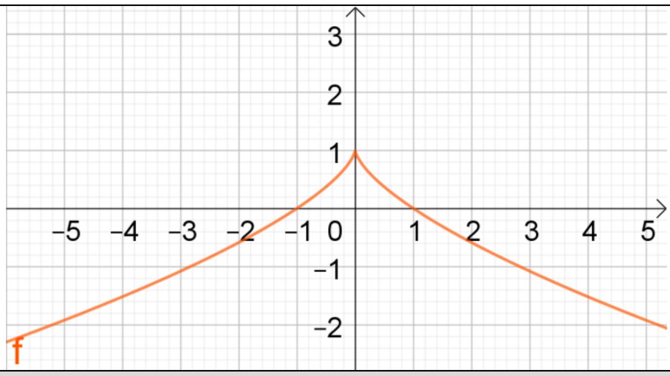
Esta derivada es siempre positiva, ya que $cosx \in [-1,1]$, siempre menor que 2. Por lo tanto, la derivada de nuevo es siempre positiva, lo que asegura que el valor que garantiza Bolzano es único.

3 Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$.
Prueba que $f(1) = f(-1) = 0$, pero que $f'(x)$ no se anula nunca en el intervalo $[-1,1]$. Explica por qué este resultado no contradice el teorema de Rolle.

Al derivar la función el resultado es:

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Que efectivamente no se anula nunca en el intervalo $[-1,1]$.
Además, es claro que $f(1) = f(-1) = 0$, sin más que sustituir en la función.
Sin embargo, la función, pese a ser continua en este intervalo, claramente no es derivable en $x = 0$, por lo que no puede aplicarse el teorema de Rolle. Efectivamente el gráfico de la función es el siguiente, donde puede apreciarse que la función tiene pendiente vertical en $x = 0$:



4 Demostrar que $e^x = 1 + x$ sólo admite una raíz real

Tenemos un problema similar a los anteriores, siempre que definamos una nueva función:

$$f(x) = e^x - x - 1$$

Buscamos cuando se anula esta función. Para ello, usamos el teorema de Bolzano.
Sin embargo podemos ver claramente que $f(0) = 0$, teniendo la raíz supuestamente buscada. De no haber encontrado la raíz directamente, no tendríamos más que buscar dos puntos en los que la función fuese positiva y negativa (como en el problema siguiente). Queda demostrar que es única.

Derivamos la función:

$$f'(x) = e^x - 1$$

Al igualar a cero:

$$e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

Que es el posible máximo o mínimo. Vemos que la función es decreciente en $x < 0$ y creciente en $x > 0$, lo que convierte a $x = 0$ en un mínimo.
Sin embargo $f(0) = 0$, por lo que al ser a su vez un mínimo, y ser la función continua, solo puede cortar en el cero esta vez, cumpliendo la hipótesis pedida.

5 Determinar el número exacto de soluciones de la ecuación $e^x = 2 + x$

Definimos como en el problema anterior una función auxiliar:

$$f(x) = e^x - x - 2$$

Comprobamos qué ocurre en $x = 0$:

$$f(0) = e^0 - 0 - 2 = -1 < 0$$

Comprobamos ahora en $x = 10$ (podríamos probar en $x = 1, 2$ ..., pero tendríamos que la función también es negativa):

$$f(10) = e^{10} - 10 - 2 = e^{10} - 12 > 0$$

No calculamos e^{10}, pero dado que $2^{10} \gg 12$, podemos suponer que e^{10} también lo es, por lo que el resultado de la operación es claramente positivo.

Al ser la función continua, y tener los dos puntos con signo contrario, garantizamos que hay al menos una raíz entre medias. Ahora bien, como en el apartado anterior, al derivar la función vemos que:

$$f'(x) = e^x - 1 \geq 0$$

Que se anula en $x = 0$. Representando el crecimiento de la función, vemos que decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, \infty)$, teniendo un mínimo en el punto $(0, -1)$. Por tanto, podemos garantizar que la función (y por tanto la ecuación) tiene dos raíces (soluciones).
NOTA: en este apartado no sería necesario comprobar con Bolzano la existencia de una raíz, sino dar una justificación a razón de la monotonía de la misma.

6	Determinar el número de soluciones de la ecuación $e^x = k + x$ en términos del parámetro k.

Al igual que en los dos ejercicios anteriores, definimos la función:

$$f(x) = e^x - x - k$$

Estudiar las soluciones de la ecuación original es equivalente que estudiar las raíces de esta función.

Lo primero que analizamos es que la función es continua en $\mathbb{R}$. A la vista de los problemas anteriores, analizamos la derivada sin recurrir siquiera a Bolzano:

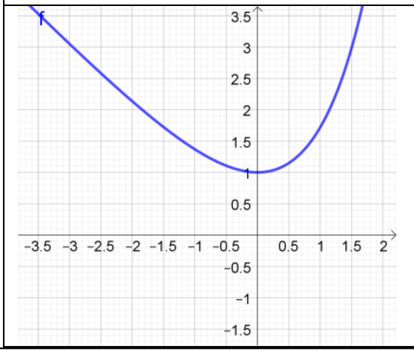
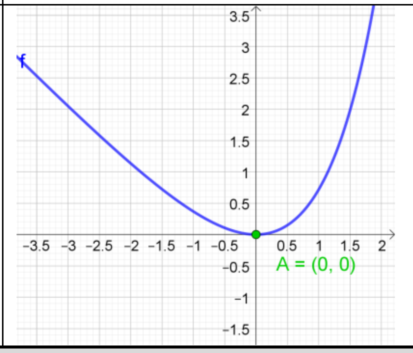
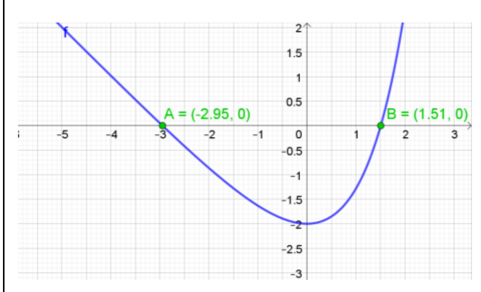
$$f'(x) = e^x - 1$$

Que se anula en $x = 0$, siendo este un mínimo, ya que la función decrece antes de este punto y crece a partir de él. Ahora bien, este mínimo tiene como ordenada:

$$f(0) = 1 - 0 - k = 1 - k$$

El número de soluciones dependerá de la colocación de este mínimo:

- $k < 1 \Rightarrow f(0) > 0$ y la función no tocará al eje de abscisas. Por tanto, la ecuación original no tendrá soluciones.
- $k = 1 \Rightarrow f(0) = 0$, el mínimo "rebota" en el eje de ordenadas, y al ser un mínimo, la solución de la ecuación será precisamente $x = 0$, única.
- $k > 1 \Rightarrow f(0) < 0$, el mínimo estará por debajo del eje de ordenadas, por lo que la ecuación tendrá dos soluciones.

$k < 1$	$k = 1$	$k > 1$
		

7	Selectividad. 2000.1A. Sea $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{senx}{x} + 2 & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$$ a) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$? b) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea derivable en $x = 0$? c) Determina sus asíntotas

En este problema se trata, a fin de cuentas, de calcular el límite:

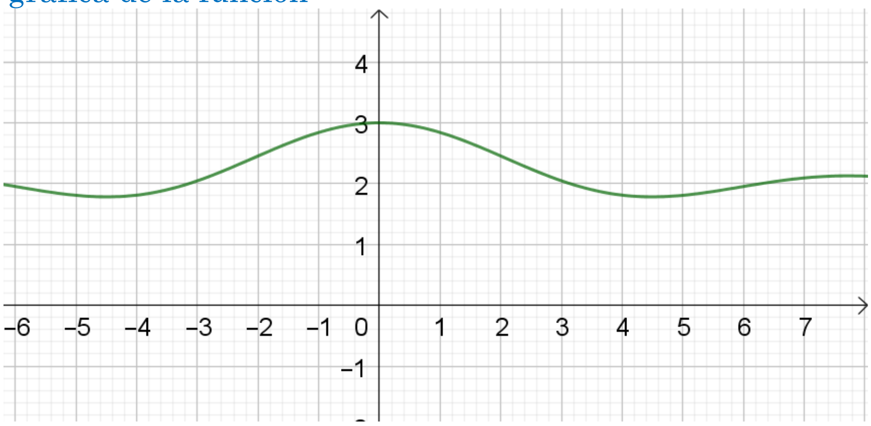
$$\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = \frac{0}{0} \underset{LH}{\rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{cosx}{1} = 1$$

A partir de aquí respondemos a las preguntas:

a) Al igualar los límites laterales del cero y $f(0)$ tenemos $1 + 2 = k \Rightarrow k = 3$

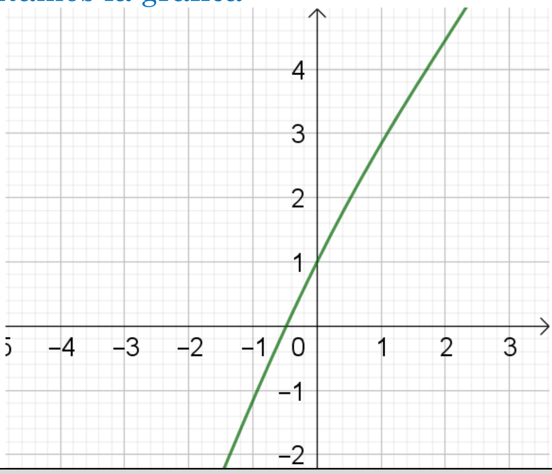
b) Para que una función sea derivable, debe ser continua. Por tanto, para que sea derivable $k = 3$. Ahora, derivamos la función y comprobamos su derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot cosx - senx}{x^2} & x \neq 0 \\ ? & x = 0 \end{cases}$$

	En $x = 0$ no sabemos el valor de la derivada, pues no se puede derivar un punto. Acudimos por tanto a la definición de derivada en un punto: $$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{senh}{h}+2-3}{h}$$ $$= \lim_{h\to 0}\frac{senh-h}{h^2} \underset{LH}{=} \lim_{h\to 0}\frac{cosh-1}{2h} \underset{LH}{=} \lim_{h\to 0}\frac{-senh}{2} = 0$$ Dado que el límite (en ambos lados) existe y coincide, y dado que la función es continua en dicho punto, la función es derivable. c) La función no tiene asíntota vertical en $x = 0$, pues ninguno de los límites laterales tienden a $\pm\infty$. En cambio, sí tiene asíntota horizontal en ambos lados, pues el límite en el infinito de una función acotada entre x tiende a cero. Por tanto: $$AH: y = 2 \ cuando\ x \to \pm\infty$$ Adjuntamos la gráfica de la función: 
8	Sea $$f(x) = \begin{cases} \frac{senx}{x}+2x & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$$ a) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$? b) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea derivable en $x = 0$?
	a) El problema es muy similar al anterior. La función es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$, donde al estudiar la continuidad tenemos: $$\lim_{x\to 0} f(x) \underset{LH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{cosx}{1}+2x = 1$$ Así pues, en este caso $k = 1$. b) Para estudiar la derivabilidad, el único problema puede llegar en $x = 0$. Para ello, usamos la definición de derivada en un punto: $$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left[\frac{senh}{h}+2h\right]-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{senh+2h^2-h}{h^2}$$ Donde podemos usar L'Hopital: $$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{cosh+4h-1}{2h}$$ Y nuevamente con L'Hopital:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{-senh + 4}{2} = 2$$

Por tanto, al ser una función continua y sus derivadas laterales coincidir, la función es derivable. Adjuntamos la gráfica:



9 Demostrar que las funciones f y g definidas por:

$$f(x) = arctg\left(\frac{1}{2x^2}\right), \qquad x \neq 0$$

$$g(x) = arctg\left(\frac{x}{x+1}\right) - arctg\left(\frac{x-1}{x}\right), \qquad x \neq 0, x \neq 1$$

Difieren, en todo punto distinto de 0 y -1, en una constante.

El hecho de que dos funciones difieran en solo una constante indican que tienen la misma primitiva. Así pues, bastará con derivar y comprobar que:

$$f'(x) = g'(x)$$

Ambas derivadas son $f'(x) = g'(x) = \frac{-4x}{4x^2+1}$

10 Sea f la función $f(x) = x\, arctg\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$

Estudiar su continuidad y su derivabilidad. Hallar su derivada en los puntos en que esta exista y en los puntos en los que no exista, ver si exisen alguna de las derivadas laterales.

En cuanto a la continuidad, $arctg\, x$ es continua, por lo que solo puede fallar en $x = 0$, donde no está definida. Sin embargo, en ese punto $f(0) = 0$.

La función $f(x)$ es por tanto continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ por serlo cada una de las funciones de la que está compuesta.

Analizamos los límites en torno a dicho punto en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = 0 \cdot \left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0 = f(0)$$

Por tanto, es continua en $x = 0$ y, por extensión, en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot arctg\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} arctg\left(\frac{1}{h}\right)$$

Analizamos los límites laterales:

	$$\begin{cases} f'(0^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} arctg\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\pi}{2} \\ f'(0^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} arctg\left(\frac{1}{h}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$ Por tanto, no existe la derivada en $x = 0$ Así pues, la función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ con: $$f'(x) = \cdots = arctg\frac{1}{x} - \frac{x^2}{x^2+1}, \qquad x \neq 0$$ Y no derivable en $x = 0$, aunque existen las derivadas laterales.
11	Sea la función definida por $f(x) = x^{2n} sen\frac{1}{x}, n \in \mathbb{N}, f(0) = 0$ Demostrar que f es n veces derivable en el origen siendo la n-ésima derivada discontinua.
	Al tratarse de la composición de funciones continuas, $f(x)$ es continua salvo en $x = 0$, donde analizamos qué ocurre: $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x^{2n}\, sen\frac{1}{x}\right) = 0$$ Al tratarse de una función potencial por una función acotada. El único problema llegaría al tomar $n = 0$ (que podría considerarse natural). Definamos en lo que sigue $f_n(x)$ como la función con un n dado. Por tanto: $$\boxed{f_n(x) \text{ es continua en } \mathbb{R} \text{ para } n > 0}$$ Analizamos ahora la derivada primera: $$f_n'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_n(0+h)-f_n(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f_n(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{2n} sen\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h^{2n-1} sen\frac{1}{h} = 0$$ Al ser el seno una función acotada. El único caso a analizar sería $n = \frac{1}{2}$, que al no ser natural (y recordemos que estamos en casos $n > 0$) no supone un problema. Por tanto, la función es derivable en $x = 0$
	Tenemos, por tanto: $$f_n'(x) = \begin{cases} 2nx^{2n-1} sen\left(\frac{1}{x}\right) + x^{2n}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$ $$\Rightarrow \boxed{f_n'(x) = \begin{cases} 2nx^{2n-1} sen\left(\frac{1}{x}\right) - x^{2n-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}} \quad n > 0$$ Ahora bien, analizando la derivada vemos que si $n = 1$ tenemos: $$f_1'(x) = \begin{cases} 2x sen\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$ Al hacer los límites laterales, vemos que esta función es discontinua en $x = 0$. Por tanto, podemos concluir que:

	$\boxed{f_n(x) \text{ es derivable en } \mathbb{R} \text{ para } n > 0, \text{ siendo } f_1'(x) \text{ discontinua}}$
	Analizamos la segunda derivada. Claramente será discontinua en los casos antes mencionados, es decir para $n = 0$ en $x = 0$ (por no ser continua), y en $n = 1$ en $x = 0$ (por no ser una vez derivable). A partir de ahí, analizamos la derivada segunda en el origen: $$f''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2n \cdot h^{2n-1} \cdot sen\left(\frac{1}{h}\right) - h^{2n-2} \cdot \cos\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h}$$ $$= \lim_{h\to 0} \left[2n \cdot h^{2n-2} \cdot sen\left(\frac{1}{h}\right) - h^{2n-3} \cdot \cos\left(\frac{1}{h}\right)\right] = 0$$ Por ser un producto de polinomios por funciones acotadas. Ahora bien, esto ocurrirá siempre que $n > 1$, pues en caso $n = 1$, tendríamos: $$f_1''(x) = \lim_{h\to 0} \left[2sen\left(\frac{1}{h}\right) - h^{-1} \cdot \cos\left(\frac{1}{h}\right)\right]$$ Que diverge en ambos sumandos. En el resto de casos, es cero. Por tanto, realizando la derivada para los casos $x \neq 0$: $$f_n''(x) = \begin{cases} 2n \cdot (2n-1)x^{2n-2} sen\left(\frac{1}{x}\right) - 2nx^{2n-3}\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \\ -(2n-2)x^{2n-3}\cos\left(\frac{1}{x}\right) - x^{2n-4} sen\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases} \quad n > 1$$ O lo que es igual: $$\boxed{f_n''(x) \underset{n>1}{=} \begin{cases} 2n \cdot (2n-1)x^{2n-2} sen\left(\frac{1}{x}\right) - (4n+2)x^{2n-3}\cos\left(\frac{1}{x}\right) - x^{2n-4} sen\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}}$$ Ahora bien, en el último factor vemos que, si $n = 2$, tenemos una divergencia. Por tanto: $$\boxed{f_n(x) \text{ es derivable dos veces en } \mathbb{R} \text{ para } n > 1, \text{ siendo } f_2''(x) \text{ discontinua}}$$
	Siguiendo el mismo argumento, vemos que, en general, $f_n(x)$ es n veces derivable, pero su derivada $f_n^{n)}(x)$ no es continua en $x = 0$.
	Idealmente, esta última aseveración debería ser probada por inducción. Sin embargo, es difícil que dé tiempo en un examen a llegar a probar esto. No obstante, lo indicamos por completitud: Colocamos las primeras derivadas separando las partes principales que nos interesan. Solo mostramos la derivada fuera de $x = 0$: $$f(x) = x^{2n} sen\left(\frac{1}{x}\right)$$ $$f'(x) = 2nx^{2n-1} sen\left(\frac{1}{x}\right) - x^{2n-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$ $$f''(x) = 2n \cdot (2n-1)x^{2n-2} sen\left(\frac{1}{x}\right) - (4n+2)x^{2n-3}\cos\left(\frac{1}{x}\right) - x^{2n-4} sen\left(\frac{1}{x}\right)$$ $$f'''(x) = (6-6n)x^{2n-5} sen\left(\frac{1}{x}\right) + (8n^3 - 12n^2 + 4n)x^{2n-3} sen\left(\frac{1}{x}\right)$$ $$+ (-12n^2 + 18n - 6)x^{2n-4}\cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^{2n-6}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Etc
El problema llega siempre en el último término, que es el que se puede cancelar cuando n es 1, 2, 3, etc.

Vemos que las expresiones son distintas para los números pares e impares. Definimos los polinomios $P_\alpha(x)$ y $Q_\alpha(x)$ y R_α como aquellos que acompañan a los términos en seno y coseno, y la que acompaña al último término, que siempre es constante e igual a ± 1. Así, podemos expresar las expresiones anteriores como:

$$f^{2k)}(x) = P_{2k}(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) + Q_{2k}(x) sen\left(\frac{1}{x}\right) + R_{2k}\cdot x^{2n-4k} sen\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f^{2k+1)}(x) = P_{2k+1}(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) + Q_{2k+1}(x) sen\left(\frac{1}{x}\right) + R_{2k+1}x^{2n-2(2k+1)}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Todos los polinomios P, Q tienen grados tipo $2n-3$ que o bien dan lugar a número fraccionarios al igualar a cero, o bien son menores que el grado de la derivada que estamos estudiando, siendo tan solo el último término el que puede dar problemas.

Para demostrar por inducción que estas expresiones son válidas, comenzamos por ver qué ocurre con $k=0$ en ambas, que deberían dar la propia función $f^{0)}(x)$ y la derivada primera $f^{1)}(x)$. Efectivamente:

$$f^{0)}(x) = P_0(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) + Q_0(x) sen\left(\frac{1}{x}\right) + R_0\cdot x^{2n} sen\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f^{1)}(x) = P_1(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) + Q_1(x) sen\left(\frac{1}{x}\right) + R_1 x^{2n-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Que se cumple claramente siempre que $P_0(x)=0$, $Q_0(x)=x^{2n}$, $R_0=1$ en la primera, y en cuanto a la segunda $P_1(x)=0$, $Q_1(x)=2nx^{2n-1}$, $R_1=-1$.

Habiendo probado este caso, y dando por válidas ambas fórmulas, analizamos el caso en que pasamos de $k\to k+1$. Lo haremos con la primera expresión:

$$f^{2(k+1))}(x) = f^{2k+2)}(x) = \frac{d^2}{dx^2} f^{2k}(x)$$

Derivamos:

$$\frac{d}{dx} f^{2k}(x) = P'_{2k}(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}P_{2k}(x) sen\left(\frac{1}{x}\right) + Q'_{2k}(x) sen\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}Q_{2k}(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$+ (2n-4k)R_{2k}\cdot x^{2n-4k-1} sen\left(\frac{1}{x}\right) - R_{2k}x^{2n-4k-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Recordemos que los polinomios y, por tanto, sus derivadas, no suponen problemas para ningún valor de n. Por tanto, podemos agrupar los términos anteriores como:

$$\frac{d}{dx} f^{2k}(x) = S_{2k}(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) + T_{2k}(x) sen\left(\frac{1}{x}\right) + U_{2k}x^{2n-4k-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donde hemos redefinido unos nuevos polinomios S, T, U que no dan problemas.

Derivando una segunda vez, y de nuevo haciendo una nueva redefinición:

$$\frac{d^2}{dx^2} f^{2k}(x) = \cdots = \alpha_{2k}(x) sen\left(\frac{1}{x}\right) + \beta_{2k}(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \gamma_{2k}x^{2n-4k-4} sen\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donde el último término dará problemas en:

$$2n-4k-4=0 \Rightarrow n = 2k+2 = 2(k+1)$$

Como se quería probar.

Lo mismo puede hacerse con las derivadas impares.

En este problema se trata el problema de las funciones de clase $\mathcal{C}^n$. Una función es de clase $\mathcal{C}^n$ si es derivable n veces, y su derivada es continua. En general, cuando ocurre lo primero, ocurre lo segundo. Sin embargo, aquí hay un ejemplo de lo contrario.

Tomemos la función $f(x) = \begin{cases} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Esta función es continua (y por tanto puede ser derivable), en virtud de:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \cdots = 0$$

Aplicando los conceptos del problema. Para su derivada el único problema ocurre en el cero, donde:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} hsen\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Ahora bien, al hacer la derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 2xsen\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Al intentar calcular los límites en la derivada vemos que:

$$\lim_{h\to 0} f'(x) \nexists$$

Esta función es el típico ejemplo de función cuya derivada existe, y sin embargo la función derivada no es continua.

Esto nos lleva a ¿cuándo es necesario utilizar la definición de derivada?

En general, es común hacer:

$$f'(a^+) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$$

Sin embargo, esto no es cierto. El ejemplo anterior es un caso de esto.

Para poder utilizar el límite de la derivada en vez de la definición, debe cumplirse que **la función sea continua**, y que el **límite exista** (y sea finito).

12 Sea $f(x) = |x|^{2n+1}$ para $n \in \mathbb{N}$

a) Demostrar que f es infinitamente derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ y que, sin embargo, sólo admite un número finito $k \in \mathbb{N}$ de derivadas en 0.

b) ¿Es $f^n(x)$ continua en 0?

Comencemos por escribir la función como una función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} (-x)^{2n+1} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x^{2n+1} & x > 0 \end{cases}$$

Ahora bien, al ser $n \in \mathbb{N}$, $2n + 1$ siempre será un número impar, podemos escribir:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} -x^{2n+1} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x^{2n+1} & x > 0 \end{cases}}$$

Al ser composición de funciones derivables, $f(x)$ es continua en cada uno de los trozos. Habrá que comprobar en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \end{cases}$$

Pues el único valor de n que podría dar problemas es $n \leq -\frac{1}{2}$, pero $n \in \mathbb{N}$. Por tanto:

$$\boxed{f_n(x) \text{ es continua en } \mathbb{R}}$$

En cuanto a la derivabilidad, podemos garantizar que en cada uno de los tramos $f(x)$ es derivable, aunque falta por analizar el punto $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+} f(0) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h^{2n+1}}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} h^{2n} = 0 \\ \lim\limits_{h\to 0^-} f(0) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{-h^{2n+1}}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} (-h^{2n}) = 0 \end{cases}$$

El resultado anterior solo se cumple en caso en que $n > 0$. En caso $n = 0$ la función no es derivable, pues las derivadas no conciden:

$$\boxed{f_0'(x) \text{ es derivable en } \mathbb{R} - \{0\}}$$

$$\boxed{f_n'(x) \text{ es derivable en } \mathbb{R} \quad \text{si } n \geq 1}$$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$, y su derivada será, siempre que $n \geq 1$:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} -(2n+1)x^{2n} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ (2n+1)x^{2n} & x > 0 \end{cases}}, \qquad n \geq 1$$

Mientras que será, si $n = 0$:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}}, \qquad n = 0$$

Analizamos ahora la derivada segunda, en el caso $n \geq 1$. Al igual que antes, será derivable en cada intervalo, pero analizamos el caso $x = 0$:

$$f''(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(2n+1)h^{2n} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}[-(2n+1)h^{2n-1}] = 0$$

Y lo mismo por la derecha. En este caso, dado que $n \geq 1$, se cumple siempre la condición anterior. Por tanto, para la derivada segunda:

$$\boxed{f''(x) = \begin{cases} -(2n+1)\cdot(2n)x^{2n-1} & x < 0 \\ (2n+1)(2n)x^{2n-1} & x > 0 \end{cases}}, n \geq 1$$

Que, en caso de ser $n \geq 1$, $f''(0) = 0$, no existiendo en caso contrario.

Sin embargo, ya estamos viendo que la tercera derivada tendrá problemas cuando sea $n = 1$…

Generalizamos al caso k:

$$f^k(x) = \begin{cases} -(2n+1)(2n)\cdot(2n-1)\ldots\big(2n-(k-2)\big)x^{2n+1-k} & x < 0 \\ ? & x = 0 \\ (2n+1)(2n)(2n-1)\ldots\big(2n-(k-2)\big)x^{2n+1-k} & x > 0 \end{cases}$$

El problema ocurre cuando $2n + 1 - k = 1 \Rightarrow k = 2n$. En ese caso, $f^k(x)$ es continua, pero no lo es su derivada. Podemos generalizar, por tanto:

$$\boxed{f^{k}(x)=\begin{cases}-(2n+1)(2n)\cdot(2n-1)\dots\big(2n-(k-2)\big)x^{2n+1-k} & x<0\\ 0 & x=0\\ (2n+1)(2n)(2n-1)\dots\big(2n-(k-2)\big)x^{2n+1-k} & x>0\end{cases}},\qquad k<2n$$

En el caso límite:

$$f^{2n}(x)=\begin{cases}-(2n+1)(2n)\cdot(2n-1)\dots(1)x^{2n+1-k} & x<0\\ (2n+1)(2n)(2n-1)\dots(1)x^{2n+1-k} & x>0\end{cases}$$

Es decir:

$$\boxed{f^{2n}(x)=\begin{cases}-(2n+1)!\,x & x<0\\ (2n+1)!\,x & x>0\end{cases}},\qquad k=2n$$

Ahora bien, a partir de este punto, la derivada comenzará a anularse:

$$\boxed{f^{k}(x)=0},\qquad k>2n$$

Ahora bien, en el caso $x=0$ vemos que la derivada $2n$ existe, pero al hacer la derivada $2n+1$-ésima no es continua:

$$f^{2n+1)}(0)=\lim_{h\to 0^{\pm}}\frac{\pm(2n+1)!\,h-0}{h}=\pm(2n+1)!$$

Es decir, las derivadas laterales no coinciden.