B2. Continuidad, derivabilidad y teoremas

1	Mel98. Demuestre que $$\frac{1}{n+1} \leq L(n+1) - Ln \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$$ Y deduzca de ello que la sucesión dada por: $$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - Ln$$ Es convergente.
2	Ast04. Se tiene la función dada por: $$f(x) = [x] + \sqrt{x + [x]}$$ Donde $[x]$ es la parte entera de x. a) Hallar dos funciones discontinuas cuya composición sea la función f. b) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función f. c) Representar gráficamente, de forma razonada, la función f.
3	Mad04. Justificar si existe alguna función f derivable en todo $\mathbb{R}$ tal que: $$\lvert f(x) \rvert < 2, \qquad f(x)f'(x) \geq sen(x)$$ Para todo $x \in \mathbb{R}$
4	Cat05. Un depósito cilíndrico de altura h y radio R, donde $R < h < 2R$, está lleno de agua. Se introduce en dicho depósito una esfera de radio r más densa que el agua. a) Obtener la función de r que expresa el volumen de agua que se derrama. b) Estudiar la continuidad de la función. c) Esbozar la gráfica de dicha función estudiando su crecimiento, puntos singulares y asíntotas. d) Determinar, si existe, el valor de r para el que es máximo el volumen de agua derramada. INDICACIÓN: el volumen del casquete esférico de radio r y altura a está dado por la expresión $C_c = \pi a^2 \left(r - \frac{a}{3}\right)$
5	Ast06. Estudie la derivabilidad de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica con período 1 y tal que si $x \in [0,1)$, entonces: $$f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx$$
6	Mad15. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}$, dos veces derivable en el origen y tal que $f(0) = 0$. Sea $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función tal que: $$F(0) = f'(0) \qquad F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{f(t)}{t}\,dt \quad \text{para } x \neq 0$$ a) Estudie la derivabilidad de F. b) ¿Es F de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}$?

Soluciones ficha B2. Continuidad, derivabilidad y teoremas

1 Mel98. Demuestre que

$$\frac{1}{n+1} \leq L(n+1) - Ln \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

Y deduzca de ello que la sucesión dada por:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - Ln$$

Es convergente.

Ideas clave:

- Teorema del valor medio
- Sucesiones monótonas acotadas

Este problema no es difícil, pero se le tiene que ocurrir a uno acudir a los teoremas de continuidad. Aplicamos el teorema del valor medio a la función $f(x) = Lx$ en el intervalo $[n, n+1]$, que dice que existe un valor $c \in (n, n+1)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

En nuestro caso:

$$\frac{1}{c} = \frac{L(n+1) - L(n)}{n+1-n} \Rightarrow \frac{1}{c} = L(n+1) - L(n)$$

Con $c \in (n, n+1)$

Dado que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$, queda demostrado el enunciado.

2 Ast04. Se tiene la función dada por:

$$f(x) = [x] + \sqrt{x + [x]}$$

Donde $[x]$ es la parte entera de x.

a) Hallar dos funciones discontinuas cuya composición sea la función f.
b) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función f.
c) Representar gráficamente, de forma razonada, la función f.

Comenzamos por analizar que la función está definida solo en $x \in [0, \infty)$, pues cualquier valor negativo haría negativo el argumento de la raíz, sea como sea que se defina la parte entera de x.

Una opción para realizar este apartado es notar que podemos escribir $f = g \circ f$, donde g debe ser una función discontinua que se comporte como la identidad en el rango que admite f. Dado que f es discontinua, falta encontrar una función g que cumpla esta igualdad.

La idea es buscar una función que no modifique a f. Podemos observar algunos valores de f para hacernos a la idea:

x	$f(x)$
0	0
1^-	1
1^+	$1+\sqrt{2}$
2^-	$1+\sqrt{3}$
2^+	4

Vemos que en los enteros, la función parece pegar "saltos". Como veremos más adelante, además, es una función estrictamente creciente. Así pues, vemos que por ejemplo se

	tiene que $f(1^-)=1$ y $f(1^+)=1+\sqrt{2}=2.4142\ldots$. Nótese que el valor 2 no lo alcanza nunca la función, ni ningún valor entre 1 y 2.4142. Pero lo mismo ocurre con valores entre $1+\sqrt{3}\approx 2.7$ y 4. Así pues podemos escoger varias funciones g que cumplen lo que buscamos. Una de ellas es: $$g(x)=\begin{cases} x & si\ \ x\neq 3 \\ 0 & si\ \ x=3\end{cases}$$ Ya que $3\notin Imf$, y por tanto nunca tendremos que calcular $g(3)$ al hacer la composición de las funciones. Podríamos haber hecho lo mismo con 2, con 5 o con 6.
	Segunda solución al apartado a: **Por BV** Usemos como primera función la función discontinua $g(x)=\frac{1}{x}$, y como segunda función: $$h(x)=\left[\frac{1}{x}\right]+\sqrt{\frac{1}{x}+\left[\frac{1}{x}\right]}$$ Si componemos las dos funciones, tenemos: $$(h\circ g)(x)=h\big(g(x)\big)=\left[\frac{1}{1/x}\right]+\sqrt{\frac{1}{1/x}+\left[\frac{1}{1/x}\right]}$$ Que resulta en: $$[x]+\sqrt{x+[x]}$$ Que es la función original. Ahora bien, explícitamente, la función compuesta $h\circ g$ no está definida en cero, pues al actuar g sobre cero, y no estar este en su dominio, no se puede calcular $h\big(g(0)\big)$. Sin embargo, no resulta difícil solventar esta dificultad. Por ejemplo, podemos usar algún valor de la imagen de g que no sea posible calcular en el dominio de h y usarlo para este fin. Por ejemplo: $$g(x)=\begin{cases} 1/x & x\neq 0 \\ -1 & x=0\end{cases} \qquad h(x)=\begin{cases} \left[\frac{1}{x}\right]+\sqrt{\frac{1}{x}+\left[\frac{1}{x}\right]} & x\neq -1 \\ 0 & x=-1\end{cases}$$ Nótese lo que se ha hecho. En el caso en que $x=0$ tenemos: $$g(0)=-1\Rightarrow h\big(g(0)\big)=h(-1)=0$$ Como debía ser, pues $f(0)=0$. Ahora bien, para cualquier otro valor, usaremos $1/x$, que nos llevará a la función original como hemos visto anteriormente. Por supuesto, los valores negativos de la imagen de $g(x)$ no tienen imagen en h, debido a la raíz.
b	Pasamos al apartado b La demostración de que $f(x)$ es discontinua en los enteros podemos incluirla en este apartado o en el anterior.

	La justificación es sencilla. Cada vez que x se acerca al entero siguiente, llega un momento en que "pega un salto". Matemáticamente, vemos que: $$\begin{cases} \lim_{x\to n^-} f(x) = \lim_{x\to n^-} \left[[x] + \sqrt{x+[x]}\right] = n-1+\sqrt{n+n-1} = n-1+\sqrt{2n-1} \\ \lim_{x\to n^+} f(x) = \lim_{x\to n^+} \left[[x] + \sqrt{x+[x]}\right] = n+\sqrt{n+n} = n+\sqrt{2n} \end{cases}$$ Esto prueba que la función no es continua en n, es decir, en los enteros. Estudiaremos el caso $x = 0$ aparte como un caso especial. $$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 + \sqrt{0+0^+} = 0 \end{cases}$$ Así que sí es continua en $x = 0$. NOTA: una forma quizá más elegante de tratar este problema, para evitar n^+ y n^-, es utilizar sucesiones. Por ejemplo, el caso de $n \to 0^+$ se puede tratar con una sucesión $\frac{1}{n}$ donde $n \to \infty$. En cuanto a la derivabilidad, notemos que la función $[x]$, lejos de los enteros, es constante y, por tanto derivable. En cuanto a la raíz cuadrada tampoco da problemas, pues siempre trabajamos en $\mathbb{R}^+$. Hemos visto ya que **en los enteros no es derivable**, pues no es continua. Podemos matematizarlo un poco más. La función $[x]$ es constante, así que su derivada es cero. Así pues: $$f'(x) = 0 + \frac{1}{2\sqrt{[x]+x}} \cdot (0+1) = \frac{1}{2\sqrt{[x]+x}}$$ Que es derivable en $\mathbb{R}^+$ (salvo los enteros). Nos queda estudiar el caso del cero. Acudimos a la definición: $$f'(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{[h]+\sqrt{[h]+h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h}$$ Que podemos reescribir como: $$f'(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$ Es decir, la función no es derivable en $x = 0$
	Calculamos algunos valores: $$f(0) = \cdots = 0$$ $$f(1) = \cdots = 1 + \sqrt{2} = 2.4142\ldots$$ $$f(2) = \cdots = 2 + \sqrt{4} = 4$$ $$f(3) = 3 + \sqrt{6} = 5.4495\ldots$$ Vemos que los valores están cada vez más cercanos, pero no lo suficiente como para dar una idea general del comportamiento de la función.

El siguiente paso es notar qué le ocurre a la función en los enteros. Vemos claramente que $f(a)$ coincide con el límite por la derecha, pero no por la izquierda. Calculemos los límites por la izquierda:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 + \sqrt{0+1} = 1$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1 + \sqrt{0+2} = 1 + \sqrt{2}$$

Etc.
Con esto, tenemos una idea de qué ocurre en los enteros. El siguiente paso es observar la derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{[x]+x}}$$

Hemos visto que en cero la función es vertical (no es derivable). Pero observamos también que:

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$$

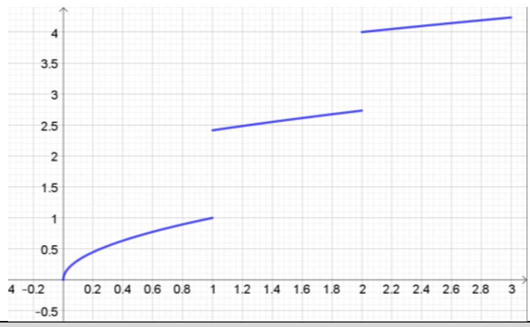
Es decir, la función se va "tumbando" a medida que nos alejamos. Además, $f'(x) > 0$ siempre, es decir, siempre es creciente.

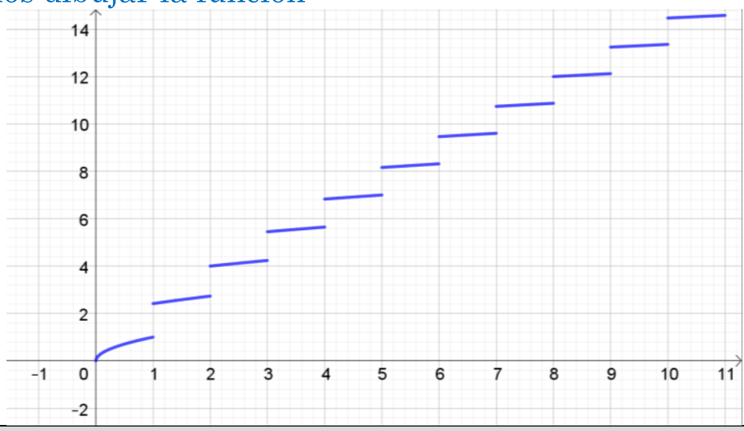
Quizá podría ser interesante acudir a la segunda derivada:

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{-1}{2} \cdot ([x]+x)^{-3/2} \cdot (0+1) = \frac{-1}{\sqrt[3]{([x]+x)^2}}$$

Es decir, siempre es cóncava hacia abajo.

Con toda esta información, ya podemos dibujar la función:





3 Mad04. Justificar si existe alguna función f derivable en todo $\mathbb{R}$ tal que:

$$|f(x)| < 2, \qquad f(x)f'(x) \geq sen(x)$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$

Despejando tenemos que:

$$f(x)f'(x) - sen(x) \geq 0$$

Construimos ahora una función $F(x)$ que se ajuste a esto:

$$F(x) = \frac{f(x)^2}{2} + cosx$$

Cuya derivada es justamente la expresión anterior. Ahora, necesitamos una función $f(x)$ que cumpla con esta hipótesis y la del enunciado.

Vemos que $F(0) = \frac{f(0)^2}{2} + 1$, mientras que $F(\pi) = \frac{f(\pi)^2}{2} - 1$. Restando ambas expresiones:

$$F(\pi) - F(0) = \frac{1}{2}[f^2(\pi) - f^2(0)] - 2 \geq 0$$

Puesto que la función es creciente. Ahora bien, esto nos lleva a:

$$f^2(\pi) - f^2(0) \geq 4$$

Dado que $|f(x)| < 2$, entonces es imposible que se cumpla la condición anterior, por lo que no es posible buscar tal función en $\mathbb{R}$.

4 Cat05. Un depósito cilíndrico de altura h y radio R, donde $R < h < 2R$, está lleno de agua. Se introduce en dicho depósito una esfera de radio r más densa que el agua.

a) Obtener la función de r que expresa el volumen de agua que se derrama.
b) Estudiar la continuidad de la función.
c) Esbozar la gráfica de dicha función estudiando su crecimiento, puntos singulares y asíntotas.
d) Determinar, si existe, el valor de r para el que es máximo el volumen de agua derramada.

INDICACIÓN: el volumen del casquete esférico de radio r y altura a está dado por la expresión $C_c = \pi a^2 \left(r - \frac{a}{3}\right)$

De forma elemental, la esfera tiende a hundirse en el agua, pues es más densa, y desalojará un volumen igual al que esta ocupa.
Ahora bien, lo primero es comparar el agua dentro del cilindro con la altura de la esfera, ya que no es igual que la esfera se hunda totalmente a parcialmente. Distinguiremos varios casos, empezando por el más sencillo.

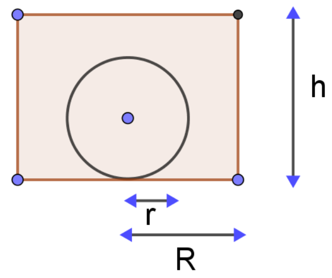
Caso i) La esfera se sumerge completamente

En este caso se tiene que $2r \in (0, h) \Rightarrow r \in \left(0, \frac{h}{2}\right)$, es decir, que $0 \leq 2r \leq h \leq 2R$

El volumen de la parte sumergida es $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

Que, en consecuencia, también será igual al volumen de agua derramado:

$$\boxed{V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad 0 < 2r \leq h \leq 2R}$$

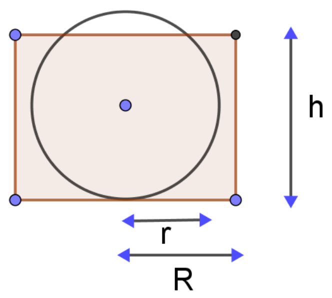


Caso ii) La esfera no se sumerge completamente, pero queda apoyada en la base del cilindro.

En este caso, $2r > h \Rightarrow 0 < h < 2r \leq 2R$

El agua derramada es justamnete el casquete esférico, cuya fórmula proporciona el enunciado, siendo la altura del casquete $a = h$

$$\boxed{V(r) = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right) \quad 0 < h < 2r \leq 2R}$$



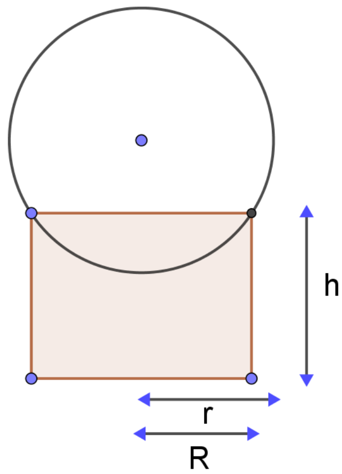
NOTA: Fíjese en el uso de los iguales en las desigualdades, pues será importante para más adelante estudiar la continuidad.

Caso iii) Cuando la esfera es tan grande que no toca el suelo del cilindro.
En este caso $2r > 2R \Rightarrow r > R$
Se tiene por tanto que:

$$0 < h < 2R < 2r$$

El volumen desalojado vuelve a ser el de un casquete esférico, pero esta vez en la zona de abajo. Para hallar su altura, podemos hacerlo con Pitágoras:

$$r^2 = (r-a)^2 + R^2 \Rightarrow r - a = \sqrt{r^2 - R^2} \Rightarrow a = r - \sqrt{r^2 - R^2}$$



No nos deberíamos preocupar por el signo $\pm$ de la raíz, dado que si consideramos el cambio de signo, tendríamos que:

$$a = r + \sqrt{r^2 - R^2} > r$$

Lo cual, por construcción, es imposible.

Tampoco deberíamos preocuparnos por el argumento de la raíz, pues dado que $r > R$, está garantizado que es posible calcular esta raíz.

El volumen desalojado es, pues:

$$V(r) = \pi\left(r - \sqrt{r^2 - R^2}\right)^2\left(r - \frac{r - \sqrt{r^2 - R^2}}{3}\right)$$
$$= \frac{\pi}{3}\left(r^2 + r^2 - R^2 - 2r\sqrt{r^2 - R^2}\right)\left(2r + \sqrt{r^2 - R^2}\right)$$

Que dejaremos finalmente como:

$$\boxed{V(r) = \frac{\pi}{3}\left(2r^2 - R^2 - 2r\sqrt{r^2 - R^2}\right)\left(2r + \sqrt{r^2 - R^2}\right) \quad 0 < h < 2R < 2r}$$

De esta forma, hemos construido finalmente la función del volumen desalojado en términos de r, atendiendo a su comparación con R y con h:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 & 0 < r \leq \frac{h}{2} \\ \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right) & \frac{h}{2} < r \leq R \\ \frac{\pi}{3}\left(2r^2 - R^2 - 2r\sqrt{r^2 - R^2}\right)\left(2r + \sqrt{r^2 - R^2}\right) & r > R \end{cases}$$

b) El siguiente paso es estudiar la continuidad de la función.
El primer tramo es obviamente continuo por ser un polinomio.
El segundo tramo también es continuo.
En el tercer tramo hay dos raíces, pero dado que $r > R$ ninguna presenta problemas.

Estudiamos ahora los puntos de ruptura:
En $r = \frac{h}{2}$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{r\to\left(\frac{h}{2}\right)^-} V(r) = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{h}{2}\right)^3 = \dfrac{\pi}{6}h^3 \\ \lim\limits_{r\to\left(\frac{h}{2}\right)^+} V(r) = \pi h^2\left(\dfrac{h}{2}-\dfrac{h}{3}\right) = \pi h^2\cdot\dfrac{h}{6} = \dfrac{\pi}{6}h^3 \\ V\left(\dfrac{h}{2}\right) = \lim\limits_{r\to\left(\frac{h}{2}\right)^-} V(r) = \dfrac{\pi}{6}h^3 \end{cases}$$

Así que la función, como no podía ser de otra manera, es continua en $r = \frac{h}{2}$.

En $r = R$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{r\to R^-} V(r) = \pi h^2\left(R-\dfrac{h}{3}\right) \\ \lim\limits_{r\to R^+} V(r) = \dfrac{\pi}{3}(2R^2 - R^2 - 0)(2R+0) = \dfrac{2\pi}{3}R^3 \\ V(R) = \lim\limits_{r\to R^-} V(r) = \pi h^2\left(R-\dfrac{h}{3}\right) \end{cases}$$

Sorprendentemente, aquí tenemos una discontinuidad en $r = R$, de tipo salto finito.

Para determinar su gráfica tenemos ya la siguiente información:

- Su dominio es $domV(r) = \mathbb{R}^+$
- Es continua en $(0,\infty) - \{R\}$

Para hallar el crecimiento, derivamos. Los dos primeros tramos son obvios, para el tercero:

$$V'(r) = \frac{\pi}{3}\left[\left(4r - \left(2\sqrt{r^2-R^2} + 2r\cdot\frac{2r}{2\sqrt{r^2-R^2}}\right)\right)\left(2r+\sqrt{r^2-R^2}\right) + \left(2r^2 - R^2 - 2r\sqrt{r^2-R^2}\right)\left(2+\frac{2r}{2\sqrt{r^2-R^2}}\right)\right]$$

Intentemos simplificar esta expresión:

$$V'(r) = \frac{\pi}{3\sqrt{r^2-R^2}}\left[\left(4r\sqrt{r^2-R^2} - (2(r^2-R^2)+2r^2)\right)\left(2r+\sqrt{r^2-R^2}\right) + \left(2r^2-R^2-2r\sqrt{r^2-R^2}\right)\left(2\sqrt{r^2-R^2}+r\right)\right]$$

Un poco más:

$$V'(r) = \frac{\pi}{3\sqrt{r^2-R^2}}\left[2\left(2r\sqrt{r^2-R^2} - 2r^2 + R^2\right)\left(2r+\sqrt{r^2-R^2}\right) + \left(2r^2-R^2-2r\sqrt{r^2-R^2}\right)\left(2\sqrt{r^2-R^2}+r\right)\right]$$

Nótese que podemos sacar factor común si cambiamos los signos al segundo sumando:

$$V'(r) = \frac{\pi\left(2r\sqrt{r^2-R^2} - 2r^2 + R^2\right)}{3\sqrt{r^2-R^2}}\left[2\left(2r+\sqrt{r^2-R^2}\right) - \left(2\sqrt{r^2-R^2}+r\right)\right]$$

Teniendo ahora:

$$V'(r) = \frac{\pi\left(2r\sqrt{r^2-R^2} - 2r^2 + R^2\right)}{3\sqrt{r^2-R^2}}[3r]$$

Llegando finalmente a:

$$V'(r)=\frac{\pi r\left(2r\sqrt{r^2-R^2}-2r^2+R^2\right)}{\sqrt{r^2-R^2}}$$

Quedando finalmente:

$$\boxed{V'(r)=\begin{cases}4\pi r^2 & 0<r\leq\frac{h}{2}\\ \pi h^2 & \frac{h}{2}<r\leq R\\ \frac{\pi r\left(2r\sqrt{r^2-R^2}-2r^2+R^2\right)}{\sqrt{r^2-R^2}} & r>R\end{cases}}$$

El siguiente paso es comprobar si esta función es derivable. En cada tramo lo es, por ser o bien polinomio y función constante como en los dos primeros, o no suponer problemas con las raíces en el tercero, igual que vimos en la continuidad. Ahora bien, habrá que estudiar los puntos de ruptura.

En $r=\frac{h}{2}$:

$$V\left(\left(\frac{h}{2}\right)^-\right)=4\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2=\pi h^2$$
$$V\left(\left(\frac{h}{2}\right)^+\right)=\pi h^2$$

Por tanto, y ya que era continua, es derivable.
En $r=R$ la función no era continua, así que tampoco es derivable.

Sin embargo, puede resultar interesante calcular el límite de la derivada por la derecha (por la izquierda tiende a ser constante):

$$\lim_{r\to R^+}V'(r)=\lim_{r\to R^+}\frac{\pi r\left(2r\sqrt{r^2-R^2}-2r^2+R^2\right)}{\sqrt{r^2-R^2}}=\frac{-R^2}{0}=-\infty$$

Es decir, la función tiende a tener pendiente vertical en ese punto, lo cual nos será útil para el esbozo de la función.

Para el crecimiento, debemos buscar puntos singulares, es decir, igualar la derivada a cero. Para ello vamos tramo por tramo.
1º tramo:

$$V'(r)=0\Rightarrow r=0$$

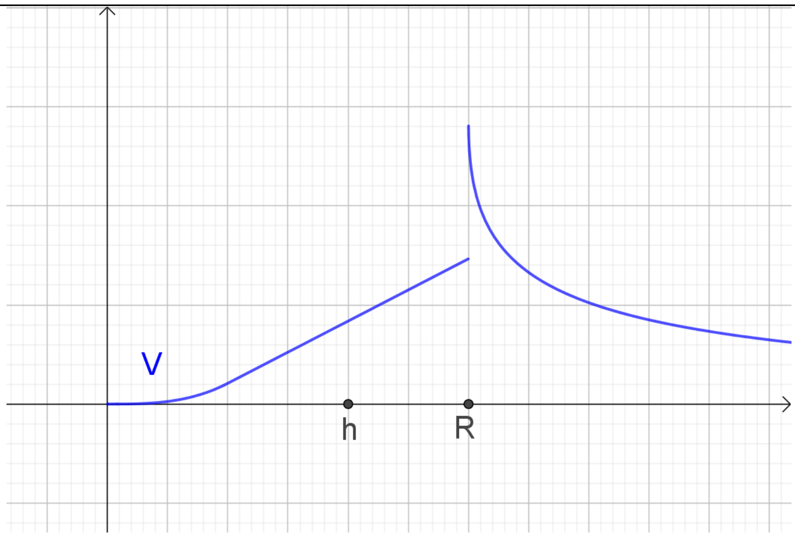
Que, más que un punto singular, es el inicio de la función. En este punto el volumen es cero y, obviamente, es un mínimo, ya que no tendríamos esfera.
2º tramo:

$$V'(r)=0\Rightarrow \pi h^2\neq 0$$

Este es un tramo con pendiente constante, es decir, un tramo rectilíneo, que no puede tener puntos singulares.
3º tramo:

$$V'(r)=0\Rightarrow\frac{\pi r\left(2r\sqrt{r^2-R^2}-2r^2+R^2\right)}{\sqrt{r^2-R^2}}\Rightarrow 2r\sqrt{r^2-R^2}-2r^2+R^2=0$$

	Hemos descartado la solución $r=0$, ya que no pertenece a este intervalo. Resolviendo la ecuación: $$2r\sqrt{r^2-R^2}=2r^2-R^2 \Rightarrow 4r^2(r^2-R^2)=4r^4+R^4-4r^2R^2$$ Desarrollando: $$4r^4-4r^2R^2=4r^4+R^4-4r^2R^2 \Rightarrow R^4\neq 0$$ Así que tampoco puede haber en este intervalo puntos singulares. Por tanto, la función es monótona en cada uno de los intervalos. Tomamos un punto en cada uno de ellos (puedes ayudarte con una recta real colocando los puntos $r=0$, $r=\frac{h}{2}$ y $r=R$), y tenemos finalmente que: $$\begin{cases} V(r) \text{ crece en el intervalo } \left(0,\frac{h}{2}\right) \\ V(r) \text{ crece en el intervalo } \left(\frac{h}{2},R\right) \\ V(r) \text{ decrece en el intervalo } (R,\infty) \end{cases}$$
	Para las asíntotas: $$V(r)=\begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 & 0<r\leq\frac{h}{2} \\ \pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right) & \frac{h}{2}<r\leq R \\ \frac{\pi}{3}\left(2r^2-R^2-2r\sqrt{r^2-R^2}\right)\left(2r+\sqrt{r^2-R^2}\right) & r>R \end{cases}$$ Vemos que la función no tiene, en principio, asíntota vertical, aunque ya vimos al estudiar la derivabilidad que sí, pero solo en $r\to R^+$. En cuanto a la horizontal, calculamos: $$\lim_{r\to\infty}V(r)=\lim_{r\to\infty}\frac{\pi}{3}\left(2r^2-2r\sqrt{r^2}\right)\left(2r+\sqrt{r^2}\right)=\lim_{r\to\infty}\frac{\pi}{3}(0)(3r)=0$$ Como era de esperar, tiene asíntota horizontal $V=0$ cuando $r\to\infty$. Esto es lógico, pues si el radio de la esfera es muy grande comparado con la abertura del cilindro, la esfera apenas entra en él, de forma que no desaloja agua.
	Finalmente la función queda:



Nota: quizá sea interesante discriminar la gráfica según la relación entre h y R (concretamente entre $\frac{h}{2}$ y R), aunque consideramos que el problema es ya suficientemente largo para tal disquisición.

5 Ast06. Estudie la derivabilidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, periódica con período 1 y tal que si $x\in[0,1)$, entonces:

$$f(x)=2x^3+bx^2+cx$$

Asumimos que el trozo a repetir en la función periódica es el contenido en el intervalo (0,1), de periodo 1. Así, podemos no preocuparnos de lo que ocurra fuera de los enteros, centrándonos sólo en estos.
Además, lo que ocurra en el origen debe repetirse en el resto de enteros, dado que la función es periódica con periodo 1. Por tanto, estudiado el origen, estudiada la función.
Estudiamos la continuidad:

$$f(0)=0$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$$

Ahora bien, al estudiar en 0^- nos salimos del intervalo propuesto, pero podemos devolverlo por la parte de la derecha en 1^-, por ser periódica:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=2+b+c$$

Así pues, para que la función sea continua, la condición que debe cumplirse es:

$$\boxed{2+b+c=0}$$

Automáticamente, la función no será derivable si no se cumple esta condición.

Calculamos ahora las derivadas, en caso de que se cumpla la condición anterior:

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(6x^2+2bx+c)=c$$
$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-}(6x^2+2bx+c)=6+2b+c$$

Así pues, para que la función sea derivable, debe cumplirse que:

$$c=6+2b+c\Rightarrow 6+2b=0\Rightarrow \boxed{b=-3}$$

Eso sí, la función no será derivable si no es continua, por lo que, con la condición del apartado anterior:

$$2-3+c=0\Rightarrow \boxed{c=1}$$

Así pues, si $b=-3$ y $c=1$ la función será derivable en $\mathbb{R}$. En caso contrario, será derivable en $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.

6	Mad15. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}$, dos veces derivable en el origen y tal que $f(0) = 0$. Sea $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función tal que: $$F(0) = f'(0) \qquad F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{f(t)}{t}dt \text{ para } x \neq 0$$ a) Estudie la derivabilidad de F. b) ¿Es F de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}$?
	Advertencia inicial: Cuando damos clase en bachillerato, es frecuente intercambiar la notación $f'(a^+)$ por $\lim_{x\to a^+} f'(x)$. Muchos, incluso, no utilizan una de las dos notaciones en absoluto. La cuestión en este problema es saber cuándo es igual la expresión: $$f'(a^+) \underset{?}{=} \lim_{x\to a^+} f'(x)$$ Si la función f es continua en a^+, entonces podemos razonar de la siguiente manera: $$f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ Aquí está la clave del asunto. Si la función es continua, entonces se tiene: $$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)} \Rightarrow \lim_{x\to a^+}[f(x) - f(a)] = 0$$ O, en notación con h: $$\lim_{h\to 0^+}[f(a+h) - f(a)] = 0$$ Esto, que a simple vista parece muy obvio, no tiene por qué ser necesariamente así. La condición, pues, es que la función **sea continua** en $x = a^+$ (igual con a^-) Una vez visto que es una función continua, y usando L'Hopital aquí (con variable h), y teniendo en cuenta que $f(a)$ es constante respecto a h: $$f'(a^+) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - 0}{1} = \lim_{h\to 0} f'(a+h)$$ Ahora bien, si cambiamos $a + h = x \Rightarrow h = x - a$, vemos que si $h \to 0$ es porque $x \to a$, de donde podemos obtener finalmente: $$\boxed{f'(a^+) = \lim_{x\to a^+} f'(x)}$$ Como queríamos demostrar. La condición necesaria aquí es que la función sea continua en el punto a para poder hacer estas manipulaciones.
	Con esto en la cabeza, empecemos el problema. Está claro que hay que empezar por analizar el comportamiento del integrando, al que llamaremos: $$g(t) = \frac{f(t)}{t}$$ Si esta función fuese continua, su integral también lo sería. Pero vemos que falla en el punto $t = 0$, aunque al ser el origen de integración, esto puede ser evitado: $$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t} = \frac{f(0)}{0} = \frac{0}{0}$$ Ahora bien, para que esto se pueda hacer, hemos hecho uso de que $\lim_{h\to 0} f(t) = f(0)$, lo cual solo ocurre si $f(x)$ es continua, que lo es, pues dice el enunciado que es derivable (que implica continuidad). El segundo paso, $f(0) = 0$, lo dice el enunciado.

	Probemos pues a usar L'Hopital: $$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(t)}{1}=\lim_{t\to 0}f'(t)=f'(0)$$ De nuevo hemos vuelto a hacer mecánicamente $\lim_{t\to 0}f'(t)=f'(0)$. Pero esto solo ocurrirá si la función derivada $f'(x)$ es continua. Que lo es, pues el enunciado dice que la función es derivable hasta dos veces en el origen. Hemos deducido, pues, que $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ es una función continua en el intervalo dado.
	Intentemos afrontar la integral haciendo uso del Teorema Fundamental del Cálculo, dado que la función integrando $g(t)$ es continua en el intervalo dado: $$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\int_0^x\frac{f(t)}{t}dt\right]=-\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{f(t)}{t}dt+\frac{1}{x}\left[\frac{f(x)}{x}\right]$$ Pues el límite inferior, efectivamente, es una constante con imagen finita. Tenemos: $$\boxed{F'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{f(t)}{t}dt+\frac{f(x)}{x^2}}$$ Es fácil comprobar que la función $F(x)$ es continua en el origen, por construcción: $$\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x g(t)dt}{x}=\frac{0}{0}\underset{LHop}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\int_0^x g(t)dt}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\int_0^x g(t)dt=\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)$$ De nuevo hemos sustituido $\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)$. Pero, para ello, $g(x)$ debería ser continua. Esto ya lo demostramos en el bloque anterior.
	El siguiente paso es determinar $g(0)$ pero, por el enunciado: $$g(0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=F(0)$$ Ya que en el apartado anterior hemos demostrado que es continua y $\lim_{x\to 0}F(x)=g(0)$. Con esto: $$\lim_{x\to 0}F'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot g(x)-\int_0^x g(t)dt}{x^2}=\frac{0}{0}\underset{L'Hopital}{=}\lim_{x\to 0}\frac{g(x)+x\cdot g'(x)-g(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}g'(x)$$ $$=\frac{1}{2}g'(0)$$ Ahora bien, para que se cumpla esto, la función $g'(x)$ debe ser continua…
	Vemos que g también es derivable en el intervalo, al serlo las funciones de las que está compuesta (recordemos que no incluimos al cero). La función derivada será: $$g'(t)=\frac{f'(t)\cdot t-f(t)1}{t^2}$$ Ahora, nos interesa el límite: $$\lim_{t\to 0}g'(t)=\lim_{t\to 0}\frac{f'(t)\cdot t-f(t)}{t^2}$$ Ahora, podemos hacer la siguiente manipulación a este resultado para arrojar algo de luz a este resultado:

$$\lim_{t\to 0} g'(t) = \lim_{t\to 0} \frac{f'(t)\cdot t - f(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(t)\cdot t - f'(0)\cdot t + f'(0)\cdot t - f(t)}{t^2}$$

Motivado porque estamos buscando la definición de derivada. Separamos el límite en dos partes:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f'(t)\cdot t - f'(0)\cdot t + f'(0)\cdot t - f(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{f'(t)\cdot t - f'(0)\cdot t}{t^2} + \frac{f'(0)\cdot t - f(t)}{t^2}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{f'(t) - f'(0)}{t}\right) + \lim_{t\to 0}\left(\frac{f'(0)\cdot t - f(t)}{t^2}\right)$$

Por esto nos dice el enunciado que f es derivable en el origen dos veces. El primer límite que tenemos es justamente la derivada segunda:

$$\lim_{t\to 0} g'(t) = f''(0) + \lim_{t\to 0}\left(\frac{f'(0)\cdot t - f(t)}{t^2}\right)$$

Ahora, para el segundo, que calculando directamente queda $0/0$, podemos usar LHopital:

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{f'(0)\cdot t - f(t)}{t^2}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{f'(0) - f'(t)}{2t}\right) = -\frac{1}{2}f''(0)$$

Juntando todo:

$$\lim_{t\to 0} g'(t) = f''(0) - \frac{1}{2}f''(0) \Rightarrow \boxed{\lim_{t\to 0} g'(t) = \frac{1}{2}f''(0)}$$

De los últimos recuadros deducimos que F es derivable en el origen, y por tanto en todo $\mathbb{R}$, siendo su derivada en $x = 0$:

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} F'(x) = \frac{1}{2}g'(0) = \frac{1}{4}f''(0)$$

Y que F' es continua en el origen $x = 0$.

En los puntos en que $x \neq 0$, la derivada F' es continua como se deduce de la continuidad de g y de la expresión anterior de la derivada F':

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{f(t)}{t}\,dt + \frac{f(x)}{x^2}$$

La función F' es por tanto continua en todo $\mathbb{R}$ y, en consecuencia, F es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}$.