1	Probar que la siguiente sucesión $b_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$ Converge (1 punto) y hallar su límite (1.5 puntos)

Nota: este problema resulta extraño en su formulación. Lo más normal es que se pidiese que la **serie** converge. Lo veremos en la segunda solución.

Solución: para ver que la sucesión b_n es convergente, en este caso, no tenemos más que calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 0$$

El resultado es trivial. Dado que el límite de la sucesión es cero (existe y es finito), es convergente.

Por dotar de algo de interés al apartado anterior, podría demostrarse que el límite anterior es cero mediante algún método más específico, como el criterio de Sándwich. Este apartado se plantea suponiendo solo conocimientos de bachillerato para hacerlo, porque asumiendo conocimiento de sucesiones básico, como decíamos antes a nivel universitario es obvio.

Tomemos $a_n = -\frac{1}{n!}$ y $c_n = \frac{1}{n!}$, primero veamos que ambas son convergentes, y cuál es su límite, para ello, compararemos esta sucesión con un límite racional polinómico.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, 0 < c_n < \frac{1}{n}$$

Por el teorema de comparación o del Sándwich,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{0} \leq \lim_{n\to\infty} c_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

Sabemos que la función $\frac{1}{x}$ es una función racional, y como el grado del denominador es mayor que del denominador, tiende a 0, cuando $n \to \infty$, por tanto:

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mathbf{0} \leq \lim_{n\to\infty} c_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

La función a_n es opuesta a la anterior, luego utilizando propiedades de los límites:

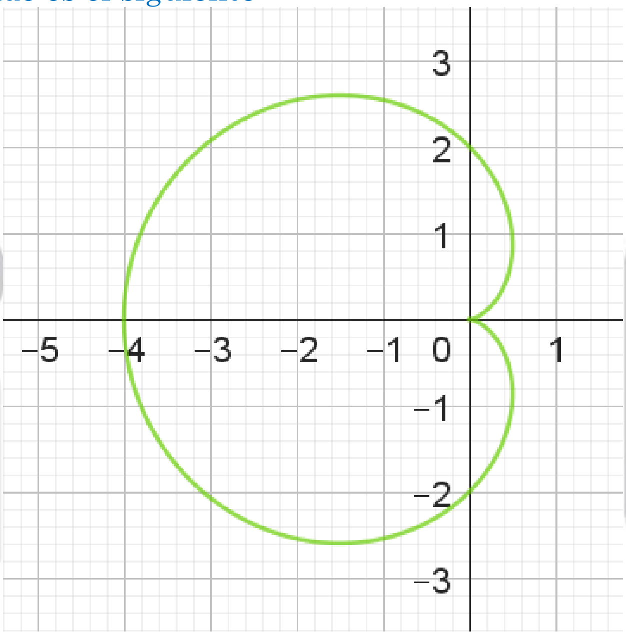
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\lim_{n\to\infty} c_n = -0 = 0$$

Una vez tenemos demostrado que a_n y c_n convergen y tienden a 0. Por el teorema de comparación:

$$a_n \leq b_n \leq c_n \Rightarrow$$

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mathrm{a_n} \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{c_n} = 0 \Rightarrow$$

	$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$
	Nota adicional: como decíamos al principio, lo que tendría sentido es hablar de la **serie**. Una serie es la suma infinita de la sucesión. Dado $b_n = \frac{(-1)^n}{n!}$, la serie será: $$S = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$ En este sentido, el problema resulta más interesante. La sucesión que se presenta aquí es una **sucesión alternada**, en tanto que $b_n \cdot b_{n+1} < 0$. Por ello, un criterio para ver si la serie converge es el de Leibniz, que dice que: Dada una sucesión a_n alternada, si $\|a_n\|$ es monótona decreciente, y $\lim_{n\to\infty}\|a_n\| = 0$, entonces la serie es convergente. En este caso, vemos que: $$\|b_{n+1}\| - \|b_n\| = \left\|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right\| - \left\|\frac{(-1)^n}{n!}\right\| = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)\cdot n!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{-n}{(n+1)!} < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$ Esto demuestra que la $\|b_n\|$ es monótona decreciente. Por otro lado, ya vimos que: $$\lim_{n\to\infty}\|b_n\| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!} = 0$$ Por tanto, esto demuestra que la serie es convergente. Para analizar a qué tiende, vemos que el desarrollo en serie de la exponencial es: $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$ Evaluándolo en $x = -1$ tenemos: $$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$$ Que es justo la serie anterior. Por tanto, el resultado de sumar los términos de la sucesión es e^{-1}.

2	Se da la siguiente curva en coordenadas polares: $$r = 2 - 2cos\theta$$ 2.1. ¿Cómo se denomina a esta familia de curvas? (0.5 puntos) 2.2. Realizar la representación gráfica de la curva de forma aproximada y a mano alzada (0.5 puntos) 2.3. Discutir sus simetrías (0.5 puntos) 2.4. Calcular la longitud de arco total de dicha curva (1 punto)
2.1	Técnicamente no tenemos una familia de curvas, sino una curva concreta, llamada **cardioide.** Para que fuese una familia, debería tener un parámetro, como, por ejemplo: $$r(\theta) = a(1 - \cos\theta)$$ Que sería una familia de cardioides escaladas por el parámetro a.
2.2 2.3	El dibujo de la cardioide es el siguiente:  Para dibujarla en GeoGebra, por cierto, hay varios métodos, pero quizá el más sencillo es el uso directo de las coordenadas polares, de la forma (r, θ): Entrada: (2-2*cos(t);t) El problema pide el dibujo aproximado, a mano alzada, de la curva. No obstante, es interesante analizar las características y escoger algunas de ellas para realizar un dibujo correcto. Veamos cuáles son, respondiendo de paso al apartado 2.3: a) Periodicidad: claramente la curva es periódica con periodo $T = 2\pi$, lo que significa que $r(\theta) = r(\theta + 2\pi)$, y podemos restringir $\theta \in [0,2\pi)$ b) Simetrías: - Eje OX: para que exista simetría en este eje, debe cumplirse que: $$r(\theta) = r(2\pi - \theta)$$

De forma general, tendríamos $r(\theta) = r(2\pi k - \theta)$, con $k \in \mathbb{Z}$, pero en este ejemplo es lo mismo una cosa que la otra. Vemos que, efectivamente, es simétrica respecto de este eje, ya que $\cos(\theta) = \cos(2\pi - \theta)$.
A partir de aquí nos restringiremos al intervalo $\theta \in [0,2\pi)$.

- Eje OY: para que se cumpla esta simetría, debe cumplirse que:
$$r(\theta) = r\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$
Que no se cumple.
- Lo mismo ocurre con la simetría respecto del polo (del origen), para la que se debe cumplir que $\rho(\theta) = \rho(\pi + \theta)$, que tampoco cumple.

c) Puntos de corte:

- Con el eje OX: aunque de forma general buscaríamos soluciones con $\theta = n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$, en este caso basta con buscar $\theta = \{0, \pi\}$, que son:
$$r(0) = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{PC_{x1} = (0,0)_P = (0,0)_C}$$
Donde el subíndice P indica coordenadas polares (r, θ), y el C en cartesianas, (x, y).
$$r(\pi) = 2 - 2cos\pi = 4 \Rightarrow \boxed{PC_{x2} = (4, \pi)_P = (-4,0)_C}$$
- Con el eje OY: aunque de forma general buscaríamos $\theta = \frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$, en este caso es suficiente con $\theta = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$:
$$r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - 2\cos\frac{\pi}{2} = 2$$
Teniendo el punto $\boxed{PC_{y1} = \left(2, \frac{\pi}{2}\right)_P = (0,2)_C}$. Por simetría, el otro punto es $\boxed{PC_{y2} = (0, -2)_C}$
- Con el polo: buscamos si existen soluciones para $r(\theta) = 0$:
$$2 - 2cos\theta = 0 \Rightarrow cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = \pi$$
Tenemos, efectivamente, una solución, que ya apareció antes.
NOTA: con la información hasta aquí, la curva se puede dibujar sin problemas.

d) Tangencias horizontales y verticales
Recordemos que las coordenadas polares son tales que:
$$\begin{cases} x(\theta) = r \cdot cos\theta \\ y(\theta) = r \cdot sen\theta \end{cases}$$
Para buscar tangencias horizontales calculamos:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial y}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} \cdot d\theta}{\frac{\partial x}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} \cdot d\theta} = \frac{sen\theta \cdot dr + rcos\theta \cdot d\theta}{cos\theta \cdot dr - rsen\theta \cdot d\theta} \cdot \frac{\frac{1}{d\theta}}{\frac{1}{d\theta}} = \frac{sen\theta \cdot r'(\theta) + r(\theta)cos\theta}{cos\theta \cdot r'(\theta) - r(\theta)sen\theta}$$
Para buscar tangencias verticales, calcularíamos $\frac{dx}{dy}$, cuyo resultado (teorema de la función inversa) es la inversa multiplicativa del anterior. Es decir, siempre que el numerador anterior sea cero (sin serlo el denominador), tendremos tangencias horizontales. Siempre que el denominador sea cero (sin serlo el

numerador), tendremos tangencias verticales. Si ambos son cero, tendremos **puntos múltiples**. Sustituimos el valor de r:

$$r(\theta)=2-2cos\theta, \qquad r'(\theta)=2sen\theta$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{sen\theta\cdot 2sen\theta+(2-2cos\theta)cos\theta}{cos\theta\cdot 2sen\theta-(2-2cos\theta)\cdot sen\theta}=\frac{sen^2\theta-\cos^2\theta+cos\theta}{2sen\theta cos\theta-sen\theta}$$

- Para las tangencias horizontales:

$$sen^2\theta-\cos^2\theta+cos\theta=0\Rightarrow 1-2\cos^2\theta+cos\theta=0$$

$$\Rightarrow cos\theta=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-4}=\begin{cases} cos\theta=1\Rightarrow\theta_1=0\\ cos\theta=-\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\theta_2=120^\circ=\frac{2\pi}{3}\\ \theta_3=240^\circ=\frac{4\pi}{3}\end{cases}\end{cases}$$

Vemos que la primera solución también anula el denominador. Por tanto, en $\theta=0$, tenemos un **punto múltiple**. Las otras dos soluciones sí dan puntos de tangencia horizontal, que son:

$$P_{h1}=\left(2-2\cos\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)_P=\left(3,\frac{2\pi}{3}\right)_P=\left(3\cos\frac{2\pi}{3},3sen\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{h1}=\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)_C}$$

Por simetría, la otra será $\boxed{P_{h2}=\left(-\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)_C}$

- En cuanto a las tangencias verticales, resolvemos:

$$2sen\theta cos\theta-sen\theta=0\Rightarrow sen\theta(2cos\theta-1)=0\Rightarrow\begin{cases}sen\theta=0\Rightarrow\theta=0,\pi\\ cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\end{cases}$$

Ya vimos que $\theta=0$ es un punto múltiple. Para los demás, todos ellos dan tangencias verticales:

$$\theta=\pi\Rightarrow r(\pi)=2-2cos\pi=4\Rightarrow(4,\pi)_P=(-4,0)_C$$

$$\theta=\frac{\pi}{3}\Rightarrow r\left(\frac{\pi}{3}\right)=2-2\cos\frac{\pi}{3}=2-1=1\Rightarrow\left(1,\frac{\pi}{3}\right)_P=\left(\cos\frac{\pi}{3},sen\frac{\pi}{3}\right)_C$$

$$\Rightarrow\boxed{P_{v1}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)_C}$$

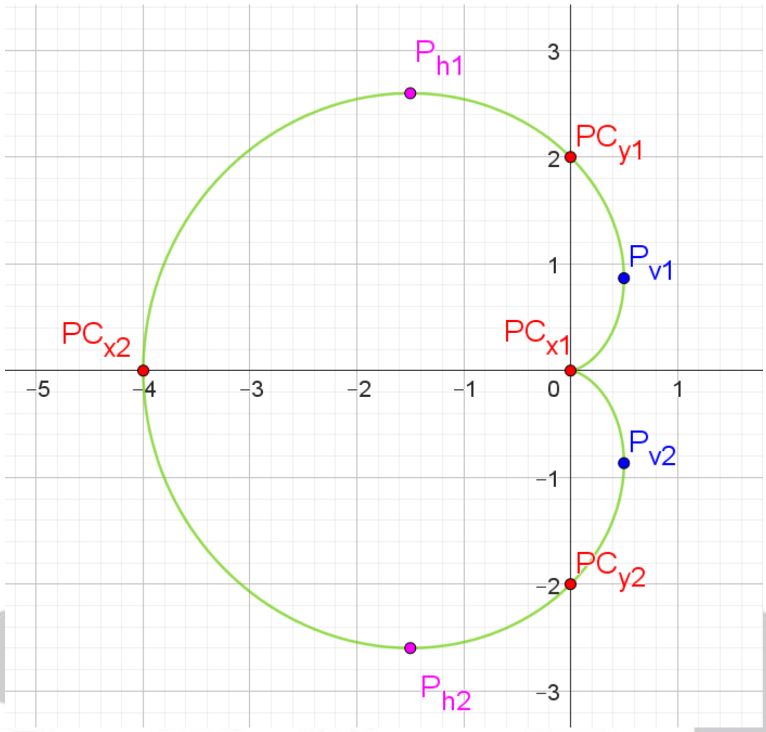
Por simetría, la última será $\boxed{P_{v2}=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)_C}$

- Si se quiere, aunque no es necesario, puede analizarse qué ocurre al acercarse al punto múltiple:

$$\lim_{\theta\to0^+}\frac{dy}{dx}=\lim_{\theta\to0^+}\frac{sen^2\theta-\cos^2\theta+cos\theta}{2sen\theta cos\theta-sen\theta}\underset{LH}{=}\lim_{\theta\to0^+}\frac{2sen\theta cos\theta+2cos\theta sen\theta-sen\theta}{2cos\theta cos\theta-2sen\theta sen\theta-cos\theta}$$

$$=\frac{0}{2-1}=0$$

Lo que indica que, al llegar a este punto (y lo mismo, por simetría, al acercarse a $2\pi^-$) la pendiente de la curva se vuelve horizontal.

	e) Podríamos analizar curvatura o asíntotas, pero no sería necesario (ni siquiera lo serían la mayor parte de los pasos). Con esto, revisamos el dibujo anterior:  Recordamos una vez más que la mayor parte de estos pasos no son necesarios para dibujar la curva.
2.4	La longitud de arco en coordenadas polares se deriva de la siguiente expresión: $$L=\int_a^b\sqrt{dx^2+dy^2}=\int_a^b\sqrt{dx^2+dy^2}\,\frac{dt}{dt}=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$ Si tomamos el parámetro t como el ángulo, y pasamos a coordenadas polares: $$\begin{cases}x(\theta)=r(\theta)\cdot cos\theta\\ y(\theta)=r(\theta)\cdot sen\theta\end{cases}$$ $$\Rightarrow L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{[r'(\theta)\cdot cos\theta-r(\theta)\cdot sen\theta]^2+[r'(\theta)\cdot sen\theta+r(\theta)\cdot cos\theta]^2}\,d\theta$$ $$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{[r']^2\cos^2\theta+r^2sen^2\theta-2rr'sen\theta cos\theta+[r']^2sen^2\theta+r^2\cos^2\theta+2rr'sen\theta cos\theta}\,d\theta$$ $$\boxed{L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta}$$ Sustituimos, con $r'=2sen\theta$. En cuanto a los límites de integración, podemos calcular o bien en $[0,2\pi]$, o bien $[0,\pi]$, aprovechando la simetría, y multiplicando por 2. Veremos que es lo mismo uno que otro: $$L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{4+4\cos^2\theta-8cos\theta+4sen^2\theta}\,d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{8-8cos\theta}\,d\theta=2\sqrt{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{1-cos\theta}\,d\theta$$ Recordamos las fórmulas del ángulo mitad:

$$sen\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}\Rightarrow\sqrt{1-cos\alpha}=\sqrt{2}sen\frac{\alpha}{2}$$

Por lo que:

$$L=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}sen\frac{\theta}{2}d\theta=4\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_{\theta_1}^{\theta_2}=-8\left[\cos\frac{\theta}{2}\right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

En este punto, decidimos los límites. Como el resultado es el mismo en ambos casos, usamos el intervalo $[0,2\pi)$:

$$L=-8\cdot\left[\cos\frac{2\pi}{2}-\cos 0\right]=-8\cdot(-1-1)=\boxed{16\ u}$$

3	Una urna contiene 4 bolas rojas y 6 bolas blancas. Una segunda urna contiene 6 bolas rojas y 4 blancas. Se traslada una bola de la primera urna a la segunda y a continuación se extrae una bola de la segunda urna. 3.1 ¿Forman los sucesos "trasladar una bola roja o una blanca de la primera urna a la segunda" un sistema completo? Razonar la respuesta (1 punto). 3.2. Calcular la probabilidad de que la bola extraída sea blanca. (1,5 puntos)
3.1	El experimento aleatorio consiste en "Trasladar una bola de la primera urna a la segunda y posteriormente extraer una bola de la segunda urna". Es un experimento compuesto por dos experimentos simples. Los sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$ forman un sistema completo de un experimento aleatorio si cumplen que: • Su unión es el espacio muestral completo: $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E \quad y$ • Son incompatibles: $A_i \cap A_j = \phi \; si \; i \neq j \; para \; i,j = 1, \dots, n$ Llamamos a las bolas de la primera urna $\{R_1, R_2, R_3, R_4, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$ y a las bolas de la segunda urna $\{R_5, \dots, R_{10}, B_7, \dots, B_{10}\}$ El espacio muestral constaría de 110 sucesos elementales del experimento completo, puesto que hay 10 posibles sucesos para el primer experimento simple y 11 para el segundo, así, sería: $E = \{R_1R_1, R_1R_5, \dots . R_1B_{10}, \quad R_2R_2, R_2R_5, \dots, R_2B_{10}, \dots, B_6B_6, B_6R_5, \dots B_6B_{10}\}$ *(Nota 1)* que se forman combinando cada una de las bolas de la primera urna con ella y las de la segunda. Si entendemos por los sucesos TBR: "Trasladar bola roja" a cualquiera que tiene $R_1, \dots R_4$ como primera opción, y TBB: "Trasladar bola blanca" a cualquiera que tiene $B_1, \dots B_6$ como primera bola, es decir, TBR tiene 44 sucesos elementales y TBB tiene 66. Concluimos que sí que forman un sistema completo por ser su unión el total y ser incompatibles. Una segunda interpretación de este apartado sería solo tener en cuenta el primer experimento simple, y no tener en cuenta el segundo experimento, por lo que el resultado sería mucho más sencillo. En este caso, $E = \{R_1, R_2, R_3, R_4, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$ y $TBR = \{R_1, R_2, R_3, R_4\} \; y \; TBB = \{, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$ y vemos claramente que son incompatibles y que su unión es el espacio muestral E definido. Como pasaba en el ejercicio 1, la redacción es ambigua. Nota 1: El espacio muestral del experimento aleatorio tiene 110 sucesos elementales. En la mayoría de libros de texto de educación secundaria y bachillerato confunden los conceptos de Espacio muestral con variable aleatoria. Siendo un poco riguroso no se puede decir que el espacio muestral del segundo experimento es Bola Roja o Blanca, esos son los valores que toma la variable aleatoria X: "*Color de la segunda bola extraída*". Es un fallo muy común, y que suele ir en contra de la definición que se hace incluso en la introducción del tema. Sirva este párrafo para corregir este tipo de errores en un futuro.

3.2	Este apartado lo podemos hacer con un diagrama de árbol sencillo: Sean los sucesos $B =$ "*la bola extraída de la segunda urna es blanca*". $R =$ "*La bola extraída de la segunda urna es roja*". Por el teorema de la probabilidad total, como TBR y TBB son un sistema completo quedaría: $$P(B) = P(TRB) \cdot p(B/TRB) + p(TRR) \cdot p(R/TRR) = = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{11} + \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{11} = \frac{46}{110}$$
4	Consideremos las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$: $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ $\{f_1 = (1,3), f_2 = (2,5)\}$ 4.1. Hallar la matriz Q de cambio de base de $\{f_i\}$ a $\{e_i\}$. (0,5 puntos) 4.2 Verificar que se cumple $Q = P^{-1}$ siendo P la matriz de cambio de base de $\{e_i\}$ a $f_i\}$ (0,5 puntos) 4.3 Mostrar que $[T]_f = P^{-1}[T]_e P$, para el operador T sobre $\mathbb{R}^2$ definido de la forma: $T(x, y) = (2y, 3x - y)$. (1,5 puntos)
4.1	En este caso, para el cálculo de la matriz de cambio de base de una a otra, depende de si operamos con los vectores de coordenadas en filas o en columnas, operando en columnas sería: - Sean $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ las coordenadas de un vector cualquiera de $\mathbb{R}^2$ en la base f. - Sean $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ las coordenadas de un vector cualquiera de $\mathbb{R}^2$ en la base e . Suponiendo que la matriz Q es la matriz tal que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, quedarían como vectores columna de esta matriz las coordenadas de los vectores de f en función de los vectores de e, es decir: $$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$(Si se trabaja con vectores fila multiplicados por la izquierda Q sería la traspuesta de la matriz anterior). Vemos que efectivamente la matriz transforma los vectores de una base en los de otra y, por tanto, cualquier vector que será combinación lineal de ellos: $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4.2 Se sabe que el cambio de base inverso lleva a la matriz inversa, lo comprobaremos. Calculando la matriz inversa quedaría:

$$Q^{-1} = P = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

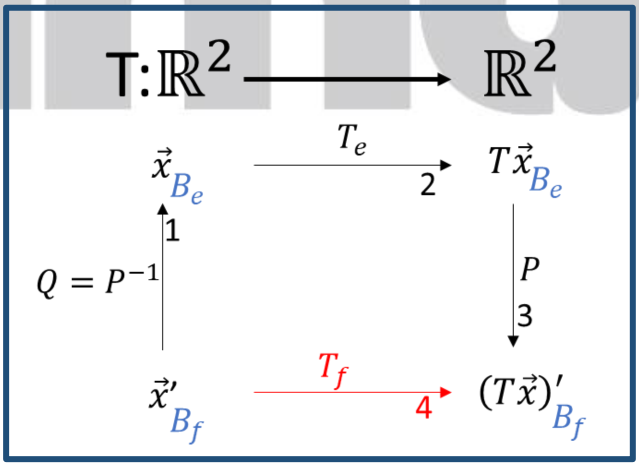
$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.3 Pongamos en columnas la matriz del operador lineal T, para ello simplemente calculemos las imágenes de los vectores de las dos bases, simplemente sustituyendo en la definición del operador:

$T(1,0) = (0,3)$
$T(0,1) = (2,-1)$
$T(1,3) = (6,0)$
$T(2,5) = (10,1)$

$$[T]_e: \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad [T]_f: \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en la base } e$$

Veamos gráficamente lo que nos piden:



Viendo el esquema, lo que debemos comprobar es que el camino recorrido por las tres flechas en negro es el mismo que el de la flecha roja, es decir, que el camino 1, 2 y 3 es igual al 4.

Haciéndolo por columnas como todo el ejercicio habría que cambiar el orden propuesto, y multiplicar las matrices en orden inverso porque el vector se pone a la derecha para transformarlo (si lo hiciésemos por filas quedaría como está):

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix}$$

Comprobemos que sí se corresponden las dos matrices que están expresadas en bases distintas:

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; y \; \begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix}$$

La primera ha sido calculada en la base $\{e_1, e_2\}$ y la segunda en $\{f_1, f_2\}$, comprobemos que ambas dos son la misma si nos referimos a la misma base.

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix}$$

<u>Solución alternativa</u>: aplicando los vectores por la izquierda en filas con las traspuestas sería:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix}$$