EXAMEN MADRID 20018 (Mad18)

Mad18.1. La corona circular que forman dos circunferencias concéntricas Γ y Γ' de radios respectivos r y r' ($r < r'$) contiene a ocho circunferencias $\Gamma_1, \Gamma_2 \dots \Gamma_8$ tales que:

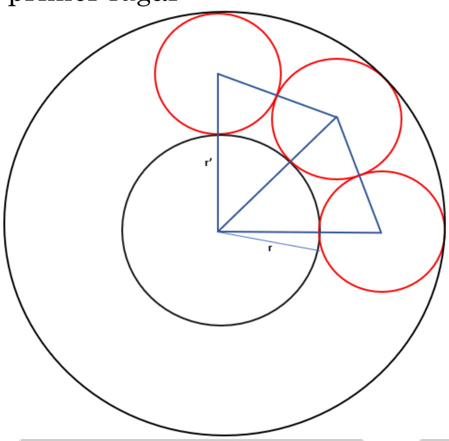
a) Γ_i es tangente a Γ y Γ' , para cada $i = 1 \dots 8$.

b) Γ_i y Γ_{i+1} son tangentes, para cada $i = 1 \dots 7$

c) Γ_8 y Γ_1 son tangentes.

Determine el cociente $\frac{r}{r'}$

Veámoslo gráficamente en primer lugar:



Solución 1 (Utilizando el teorema del coseno):
Sea l el radio común a las 8 circunferencias, y recordemos que los centros de estas forman un octógono regular concéntrico con Γ y Γ' de lado 2l y centro r +l, así, por el teorema del coseno en uno de los dos triángulos de la figura:

$$(2\mathrm{l})^2 = (\mathrm{r}+\mathrm{l})^2 + (\mathrm{r}+\mathrm{l})^2 - 2\cos\frac{\pi}{4}(\mathrm{r}+\mathrm{l})(\mathrm{r}+\mathrm{l})$$

$$(2\mathrm{l})^2 = (2-\sqrt{2})(\mathrm{r}+\mathrm{l})^2$$

$$2\mathrm{l} = \sqrt{(2-\sqrt{2})}(\mathrm{r}+\mathrm{l})$$

$$\mathrm{l} = (\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}})\mathrm{r}$$

Y como r’ = r + 2l

$$\mathrm{r}' = \mathrm{r} + 2\left(\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)\mathrm{r} = \left(1+2\left(\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)\right)r = \left(\frac{2+\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)r$$

Y la solución será:

$$\frac{r'}{r}=\left(\frac{2+\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)\cong 2{,}239828$$

Solución 2 (Dando coordenadas y transformaciones geométricas):
Observando el dibujo, vemos que los centros de las circunferencias 1, 3, 5 y 7 están sobre los ejes de coordenadas, mientras que las 2, 4, 6 y 8 están sobre las bisectrices de los cuadrantes.
Cada circunferencia pequeña, al estar entre r y r', tendrá por radio:

$$\rho=\frac{r'-r}{2}$$

El centro de la circunferencia 1 tendrá por tanto como coordenadas:

$$C_1=(r+\rho,0)\Rightarrow C_1=\left(r+\frac{r'-r}{2},0\right)\Rightarrow C_1=\left(\frac{r+r'}{2},0\right)$$

Para determinar el centro de la circunferencia 2, no tenemos más que hacer una "rotación" de 45º al vector OC_1. Para ello podemos aplicar una matriz de rotación o cualquier otra forma (proyecciones, etc):

$$C_2=\begin{pmatrix}cos45 & -sen45\\ sen45 & cos45\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{r+r'}{2}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{r+r'}{2}cos45\\ \frac{r+r'}{2}sen45\end{pmatrix}$$

Sabiendo el radio y centro de las dos primeras circunferencias, sus ecuaciones serán (llamaremos $R=\frac{r+r'}{2}$ por simplicidad):

$$\begin{cases}(x-R)^2+y^2=\rho^2\\ (x-Rcos45)^2+(y-Rsen45)^2=\rho^2\end{cases}$$

Desarrollando:

$$\begin{cases}x^2+R^2-2Rx+y^2=\rho^2\\ x^2+R^2\,cos^2\,45-2Rxcos45+y^2+R^2sen^245-2Rysen45=\rho^2\end{cases}$$

Y observamos que en la segunda ecuación podemos sacar factor común a R^2, dando como resultado:

$$\begin{cases}x^2+R^2-2Rx+y^2=\rho^2\\ x^2+R^2-2Rxcos45+y^2-2Rysen45=\rho^2\end{cases}$$

Dado que las circunferencias son tangentes, necesitamos que el sistema de ecuaciones anterior dé una única solución. Por tanto, resolvemos. Para ello, comenzamos por restar ambas ecuaciones:

$$2Rxcos45-2Rx+2Rysen45=0\Rightarrow x(cos45-1)+ysen45=0$$

De donde:

$$\boxed{y=\frac{1-cos45}{sen45}x}$$

Por simplicidad, renombraremos $\alpha\equiv\frac{1-cos45}{sen45}$, de modo que $\boxed{y=\alpha x}$

En alguna de las ecuaciones de las circunferencias, sustituimos esta expresión:

$$x^2+R^2-2Rx+\alpha^2x^2=\rho^2$$

$$x^2(1+\alpha^2)-2Rx+(R^2-\rho^2)=0$$

Finalmente, acudimos al discriminante:

$$\Delta = 4R^2 - 4(1+\alpha^2)(R^2-\rho^2) = 0$$

Que debe anularse. De aquí sacaremos la condición pedida:

$$\boxed{R^2 = (1+\alpha^2)(R^2-\rho^2)}$$

Sustituimos la expresión con sus valores:

$$R \equiv \frac{r+r'}{2}, \qquad \rho \equiv \frac{r'-r}{2}, \qquad \alpha \equiv \frac{1-cos45}{sen45}$$

Haremos cada paréntesis por separado:

$$1+\alpha^2 = 1+\left(\frac{1-cos45}{sen45}\right)^2 = 1+\frac{1+cos^2 45 - 2cos45}{sen^2 45}$$
$$= \frac{sen^2 45 + 1 + cos^2 45 - 2cos45}{sen^2 45} = 2\frac{1-cos45}{sen^2 45}$$

Por otro lado:

$$R^2-\rho^2 = \left(\frac{r+r'}{2}\right)^2 - \left(\frac{r'-r}{2}\right)^2 = \frac{r^2+(r')^2+2rr'-(r')^2-r^2+2rr'}{4} = rr'$$

Sustituyendo:

$$\left(\frac{r+r'}{2}\right)^2 = 2\frac{1-cos45}{sen^2 45}rr'$$

Desarrollando:

$$\frac{r^2+(r')^2+2rr'}{4} = 2\frac{1-cos45}{sen^2 45}rr' \Rightarrow r^2+(r')^2+2rr' = 8\frac{1-cos45}{sen^2 45}rr'$$

Que podemos escribir como ecuación de segundo grado:

$$r^2 + \left(2-8\frac{1-cos45}{sen^2 45}\right)rr' + (r')^2 = 0$$

Resolviendo para r:

$$r = \frac{\left(8\frac{1-cos45}{sen^2 45}-2\right)r' \pm \sqrt{\left(2-8\frac{1-cos45}{sen^2 45}\right)^2 (r')^2 - 4(r')^2}}{2}$$

Extrayendo factores, vemos que podemos despejar directamente la relación pedida:

$$\boxed{\frac{r}{r'} = \left(4\frac{1-cos45}{sen^2 45}-1\right) \pm \sqrt{\left(1-4\frac{1-cos45}{sen^2 45}\right)^2 - 1}}$$

Solo queda arreglar esta expresión. Empezamos por la raíz:

$$\left(1-4\frac{1-cos45}{sen^2 45}\right)^2 - 1 = 1 + 16\frac{1+cos^2 45 - 2cos45}{sen^4 45} - 8\frac{1-cos45}{sen^2 45} - 1$$
$$= 16\frac{1+1/2-2cos45}{\frac{1}{4}} - 8\frac{1-cos45}{\frac{1}{2}} =$$
$$= 64(3/2-2cos45) - 16(1-cos45) = 96 - 128cos45 - 16 + 16cos45$$
$$= 80 - 112cos45$$

Donde hemos usado el valor de $sen^2 45 = cos^2 45 = 1/2$:

Llegamos a:

$$\frac{r}{r'} = \left(4\frac{1-cos45}{sen^2 45} - 1\right) \pm \sqrt{80-112cos45}$$

Al igual que antes, con $sen^2 45 = 1/2$:

$$\frac{r}{r'} = 7 - 8cos45 \pm 4\sqrt{5-7cos45}$$

Tomando la solución positiva (la negativa da un ratio menor que 1, que no tiene sentido):

$$\boxed{\frac{r}{r'} = 7 - 8cos45 \pm 4\sqrt{5-7cos45}}$$

Cuyo valor aproximado es 2.2398

Mad18.2. Dados los números reales positivos a e b, se pide:
a) Demuestre que $a^b < b^a$ cuando $a < b < e$
b) Demuestre que $a^b > b^a$ cuando $e < a < b$

a) Comencemos por tomar logaritmos en ambos lados de la expresión. Dado que el logaritmo es una función estrictamente creciente, esto no debería afectar al signo de esta:

$$\ln a^b < \ln b^a \Rightarrow b \cdot \ln a < a \cdot \ln b \Rightarrow \frac{\ln a}{a} < \frac{\ln b}{b}$$

Sabiendo que $a < b < e$, definamos la función

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

En el intervalo que es continua, es decir, en $(0, \infty)$, y estudiemos esta función. Para ello, calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow x = e$$

Analizando este punto en su entorno, vemos que se alcanza un máximo en el mismo. Por tanto, esta función es creciente en $(0, e)$ y decreciente en el resto.
Así pues, si $a < b$ y la función es creciente, se tiene que $\frac{\ln a}{a} < \frac{\ln b}{b}$, demostrando lo que pide el enunciado.

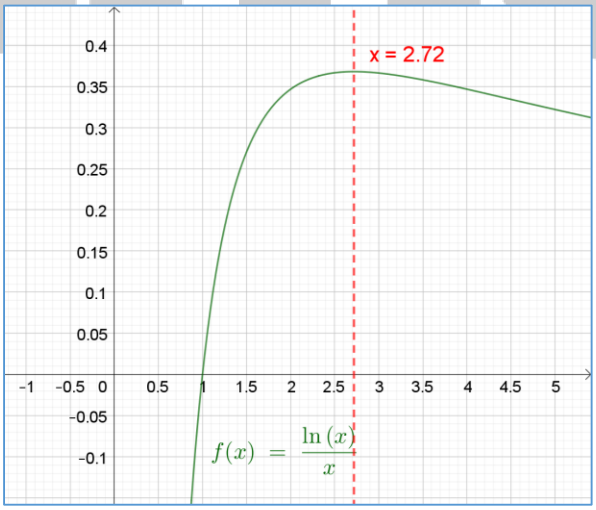
b) Del mismo modo hacemos el inverso. En el resto, al ser la función decreciente, si $a < b$ se tendrá que:

$$f(a) > f(b)$$

Es decir:

$$\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b} \Rightarrow a^b > b^a$$

Como pide el enunciado.



Mad18.3. Dado $x \in \mathbb{R}$ y el determinante

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1 & -1/3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & 1 & -1/4 & \dots & 0 & 0 \\ x^3 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & \dots & & \dots \\ x^{n-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1/n \\ x^{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Calcular $\lim_{n\to\infty} \Delta_n(x)$

Calculemos los determinantes uno por uno para ver cuál puede ser su valor:

- n = 1 $\quad \Delta_1(x) = |1| = 1$
- n = 2 $\quad \Delta_2(x) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ x & 1 \end{vmatrix} = 1 + \frac{x}{2}$
- $n = 3 \quad \Delta_3(x) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ x & 1 & -\frac{1}{3} \\ x^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{vmatrix} x & -\frac{1}{3} \\ x^2 & 1 \end{vmatrix} =$

$$1 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{3}\right) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}$$

Podemos intuir que el determinante será de la forma:

$$\Delta_n(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!}$$

Probémoslo utilizando el principio de inducción:

- Para el caso $n = 1$ ya hemos visto que la expresión es válida ya que $\Delta_1(x) = 1$
- Supuesto para n, veamos para n+1.

$$\Delta_{n+1} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \frac{x^n}{(n+1)!}$$

Probando la siguiente igualdad quedaría probado:

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n + \frac{x^n}{(n+1)!}$$

Procedamos:

$$\Delta_{n+1}(x)=\begin{vmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & -1/3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & 1 & -1/4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ x^3 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & \dots & & \dots & 0 \\ x^{n-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1/n & 0 \\ x^{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1/(n+1) \\ x^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Podemos desarrollar el determinante por la última fila, de modo que:

$$\Delta_{n+1}(x)=x^n\begin{vmatrix} -1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1/3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1/n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1/(n+1) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1 & -1/3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & 1 & -1/4 & \dots & 0 & 0 \\ x^3 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & \dots & & \dots \\ x^{n-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1/n \\ x^{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

En cuanto al problema del signo, el segundo determinante es trivial, pues el 1 de la última fila y última columna, dado que es una matriz cuadrada, siempre será un elemento con a_{ij} de forma que $i+j$ sea un número par.

En cuanto al primero, dependerá de k. La columna siempre es la primera, y la fila ocupada es $n+1$, dado que comenzamos por un 1. Así pues, llevará un elemento oscilador de la forma:

$$(-1)^{n+1}$$

Reconocemos además el determinante de orden k en la segunda expresión, y vemos que el primer determinante proviene de una matriz triangular inferior, por lo que su resultado es el producto de los elementos de la diagonal:

$$\Delta_{n+1}(x)=(-1)^{n+1}x^n\left[\prod_{i=1}^{n+1}\frac{-1}{n}\right]+\Delta_n(x)$$

Ya vimos que lo único que debemos demostrar es que:

$$\Delta_{n+1}=\Delta_n+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{(n+1)!}$$

Por tanto, por comparación, solo nos queda comprobar que:

$$(-1)^{n+1}x^n\left[\prod_{i=1}^{n+1}\frac{-1}{n}\right]=\frac{x^n}{(n+1)!}$$

O lo que es lo mismo:

$$(-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}\frac{-1}{n}=\frac{1}{(n+1)!}$$

Es fácil comprobar que el denominador se cumple, como esperamos, teniendo solo que determinar si el signo es correcto:

$$(-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}(-1)(-1)^{n+1}(-1)^{n+1}=(-1)^{2(n+1)}=1$$

Dando por concluida la demostración por inducción.

Es fácilmente reconocible, que nuestra expresión es similar al desarrollo de Taylor del número e:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots$$

Solo debemos "arreglar" esta serie para que coincida con la nuestra. Para ello, comencemos por dividir entre x (el caso $x=0$ lo veremos luego)

- $x\neq 0$

$$\frac{e^x}{x}=\frac{1}{x}+1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\cdots$$

Ahora, pasando 1/x al primer término de la igualdad, vemos que:

$$\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\cdots$$

Así que, en el límite:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\Delta_n(x)=\frac{e^x-1}{x}}$$

- $x=0$

En el último paso, deberíamos comprobar qué ocurre, haciendo uso por ejemplo de L'Hopital, en el caso de indeterminación $x\to 0$. Es sencillo comprobar que no hay problemas en este punto:

Si $x = 0$, el determinante queda reducido a:

$$\Delta_n(0) = \begin{vmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1/n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Que no es más que una matriz triangular superior, por lo que su determinante es el producto de los elementos de su diagonal, que es 1:

$$\Delta_n(0) = 1$$

Con la expresión obtenida, comprobemos que obtenemos el mismo resultado en el límite:

$$\lim_{x\to 0} \Delta_n(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \underset{L'Hopital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

Llegando al mismo resultado. Por tanto, lo más correcto en este caso sería indicar esta indeterminación en $x = 0$ del siguiente modo:

$$\boxed{\lim_{n\to 0} \Delta_n(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}}$$

Mad18.4. En una de las mesas de un casino se juega a los dados como sigue: el jugador realizará sucesivos lanzamientos de dos dados equilibrados hasta que la suma de los resultados de ambos sea 4 o 7. Si sale 4, habrá ganado; si sale 7, habrá perdido. ¿Cuál es la probabilidad de que gane el jugador?

Observemos primeramente que el número de jugadas puede ser infinito, puesto que puede ser que ninguno de los dos jugadores gane en cada jugada.

No obstante, podemos escribir la probabilidad de que gane el jugador, tomando g como la probabilidad de que gane en cada paso, y c la probabilidad de no gane, pero tampoco pierda, es decir, que $c$ontinúe jugando. Así:

$$P(ganar) = g + c \cdot g + c^2 \cdot g + \cdots$$

Ahora bien, esto es una sucesión geométrica de primer término g y de razón c. Si el juego tuviese un número finito de pasos, no tendríamos más que aplicar la expresión de la suma correspondiente, pero al ser infinito, y por ser $c < 1$ (al ser una probabilidad), podemos utilizar la suma de los infinitos términos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \Rightarrow P(ganar) = \frac{g}{1-c}$$

Lo único que nos queda es determinar cada una de estas probabilidades, pero esto lo podemos hacer fácilmente con una tabla de doble entrada:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Así, vemos que, acudiendo a la regla de Laplace (casos favorables entre casos posibles), tenemos que:

$$g = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}, \qquad c = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

Con esto:

$$P(ganar) = \frac{\frac{1}{12}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{12} \Rightarrow \boxed{P(ganar) = \frac{1}{3}}$$