Probabilidad y Estadística

www.vimat.info

Madrid, 01/04/2020

ÍNDICE

ÍNDICE

¿Qué es la estadística?

La palabra estadística tiene principalmente dos acepciones:

- La Estadística, por un lado, es la ciencia del estudio de los datos asociados a un suceso o experimento.
- Una estadística, por otro lado, es el hecho particular de estudiar un suceso concreto: recoger los datos, organizarlos y analizarlos.

Como herramienta al servicio de otras ciencias la Estadística aparece en todas partes, tanto ciencias empíricas (Física, Química, Biología…) como ciencias sociales (Economía, Sociología, Psicología…).

“Medicina=Investigación + Estadística”

Hasta en Lingüística se usa la estadística para determinar, por ejemplo, las letras más frecuentes en los textos de una lengua (que por cierto en el castellano son: e, a, o y s).
“Sorteo de letras de apellido para .....”

Probabilidad y Estadística

La Estadística como ciencia experimentó un gran avance gracias al desarrollo de la Matemáticas, en especial de la Teoría de la Probabilidad, cuyas bases no fueron establecidas hasta el siglo XVII por los matemáticos franceses Pierre de Fermat y Blaise Pascal. ¿Y qué tiene que ver la Probabilidad con la Estadística? ¡Mucho!

La Estadística es un instrumento para el estudio de un fenómeno cuando no se conocen que leyes que lo determinan.

La base matemática para el estudio estadístico de los fenómenos aleatorios la proporciona la **Teoría de la Probabilidad**, puesto que propone modelos para el estudio de dichos fenómenos aleatorios: **Distribuciones de probabilidad**

Fenómeno aleatorio

¿Qué función que lo describe mejor?

Análisis

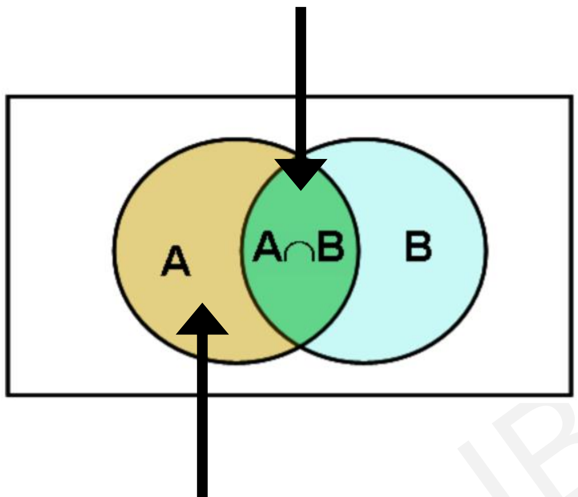
Distribución de probabilidad

Análisis estadístico: Media, varianza tendencia, estacionalidad,…

Conceptos básicos

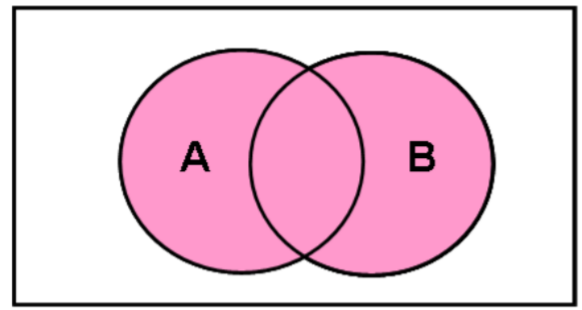
Operaciones con conjuntos

Intersección $A \cap B$

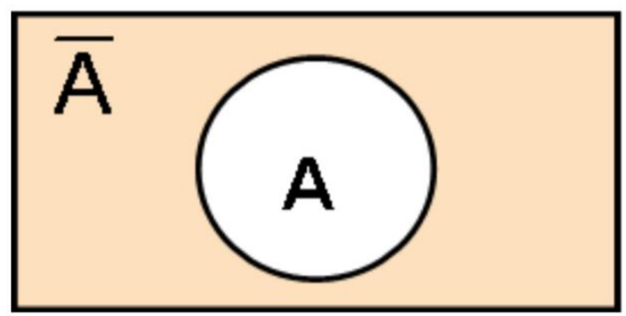


Diferencia $A - B$

Unión



Complementario



Conceptos básicos

Combinatoria

	Influye el orden/ distinguibles	Elementos disponibles	Elementos por grupo	Fórmula
Variaciones sin repetición	Si	n	m	$n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)$
Permutaciones	Si	n	n	$n(n-1)\cdot\cdots\cdot 1 = n!$
Variaciones con repetición	Si	n	m	m^n
Permutaciones con repetición	Si	n	$n = n_1 + n_2 + \cdots n_k$	$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\cdots n_k!}$
Combinaciones sin repetición	No	n	m	$\binom{n}{m}$
Combinaciones con repetición	No	n	m	$\binom{n+m-1}{m}$

Conceptos básicos

Experimento / Suceso aleatorio

- Un **experimento aleatorio** es aquel experimento que ejecutado bajo las mismas condiciones puede tener resultados distintos
- Si podemos determinar lo que va a ocurrir, lo llamaremos "experimento determinista"
- Los sucesos que pueden ocurrir en un experimento aleatorio los llamaremos "Sucesos aleatorios" y los podemos clasificar en:
  a) **Suceso elemental**: una de las posibilidades del experimentos aleatorio
  b) **Suceso compuesto**: varias de las posibilidades del experimentos aleatorio
  c) **Suceso imposible**: el que no tiene elementos.
  d) **Suceso seguro**: el que está formado por todos los resultados posibles
- El **espacio muestral** es el conjunto de todos los sucesos elementales

Conceptos básicos

- **Experimento aleatorio**: "Lanzamos una moneda hasta que sale cara, y cuando sale cara paramos"

  Es decir, que los resultados individuales de este experimento pueden ser:

  - Obtener la cara a la primera
  - Obtener una cruz y una cara
  - Obtener dos cruces y una cara
  - Obtener tres cruces y una cara
  - Obtener cuatro cruces y una cara ...

- Obtener n cruces y una cara ... Así que, si denotamos "C" por obtener una cara y "X" por una cruz, el espacio muestral es:

  Así, el espacio muestral será

$$\Omega=\{C, XC, XXC, XXXC, XXXXC, \ldots\}$$

Sigue una **distribución geométrica**

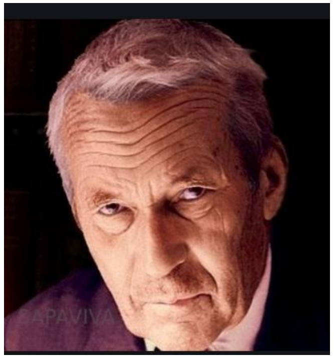
ÍNDICE

Axiomatización- Espacio probabilístico

<u>Definición</u>: La terna $(E, \sigma(E)\ , p_{\sigma(E)})$ es un **espacio probabilístico** donde E es un conjunto no vacío, $\sigma(E)$ es una σ álgebra sobre E, y $p_{\sigma(E)}$ es una función de probabilidad sobre σ . Recordemos que:

- Una **σ álgebra de E** , $\boldsymbol{\sigma(E)}$, es una familia de subconjuntos no vacía que cumple que:
  - $\forall\ M \in \sigma(E)\ , M^c \in \sigma(E)$ (su complementario también está en esa familia)
  - $\forall\ \{M_n : n \in \mathbb{N}\ y\ M_n \in \sigma(E)\}, entonces\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\ \in \sigma(E)$

- **Una función de probabilidad** $p_{\sigma(E)}$ es una función $p_{\sigma(E)} : \sigma(E) \to \mathbb{R}$, que debe cumplir:



- $\forall\ \boldsymbol{M} \in \sigma(E), \quad p_{\sigma(E)}(M) \geq 0$
- $p_{\sigma(E)}(E) = 1$
- $Si\ \{M_n : n \in \mathbb{N}\ y\ M_n \in \sigma(E)\}$ es una familia de conjuntos disjuntos entonces $p_{\sigma(E)}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p(M_n)$

Axiomatización- Espacio probabilístico

Ejemplo:Lanzamos un dado: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

$P(E) = \sigma(E)$

$= \{$ Φ , {1}, {2} , {3}, {4}, {5}, {6} , {1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,5}, {1,6}, {2,3}, {2,4}, {2,5} ,{2,6} , {3,4}, {3,5}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6}, {1,2,3}, {1,2,4} , {1,2,5}, {1,2,6} , {1,3,4} ,{1,3,5}, {1,3,6}, {1,4,5} , {1,4,6} , {1,5,6}, {2,3,4}, {2,3,5} , {2,3,6} , {2,4,5}, {2,4,6}, {2,5,6} ,{3,4,5}, {3,4,6} , {3,5,6} , {4,5,6}, {1,2,3,4}, {1,2,3,5}, {1,2,3,6}, {1,2,4,5} , {1,2,4,6} ,{1.,2,5,6}, {1,3,4,5}, {1,3,4,6}, {1,3,5,6}, {1,4,5,6} , {2,3,4,5}, {2,3,4,6}, {2,3,5,6} ,{2,4,5,6}, {3,4,5,6}, {1,2,3,4,5} , {1,2,3,4,6}, {1,2,3,5,6}, {1,2,4,5,6}, {1,3,4,5,6} , {2, 3, 4,5, 6}, E}

$$
\begin{aligned}
p_{\sigma(E)} : \sigma(E) &\to \mathbb{R} \\
A \quad &\to \frac{\#A}{6}
\end{aligned}
$$

ÍNDICE

Variables aleatorias

<u>Definición</u>: Una variable aleatoria X es una función real definida en el espacio probabilístico $(E, \sigma(E), p_{\sigma(E)})$: $X: E \rightarrow \mathbb{R}$. X induce una probabilidad sobre E.

- **Variable discreta**: La función X toma un número contable (numerable) de valores, bien sea finito o infinito.

  Ej. Lanzar una moneda 10 veces y anotar el número de caras

- **Variable continua**: La función X toma un número no contable de valores

  Ej. Medir la altura de las personas.

Las variables mencionadas anteriormente son variables cuantitativas, aunque también podrían ser cualitativas.

ÍNDICE

Distribución de probabilidad

<u>Definición</u>: Es un modelo teórico que **describe la forma en que varían los resultados de un experimento aleatorio**, es decir, nos da todas las probabilidades de todos los posibles resultados que podrían obtenerse cuando se realiza un experimento aleatorio. Se clasifican igual que las variables aleatorias, como discretas y continuas.

<u>Función de distribución</u>: En la teoría de la probabilidad, la función de distribución describe la probabilidad de que X tenga un valor menor o igual que x.

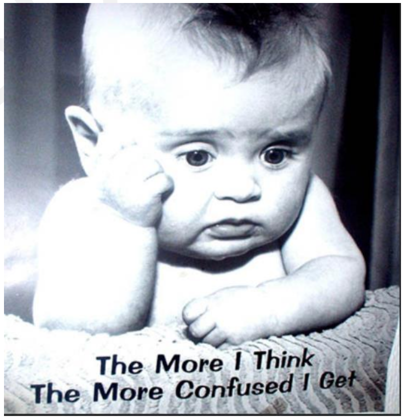
$$\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x)}$$

¿Por que se llama distribución?

https://www.youtube.com/watch?v=4HpvBZnHOVI

Distribución de probabilidad

	Discreta	Continua
Función de distribución	$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x \leq x_i} P(X = x_i)$	$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
Esperanza $E(X)$ o Media	$E(X) = \sum_{x \leq x_i} x_i \cdot P(X = x_i)$	$E(X) = \int_{-\infty}^{x} t \cdot f(t)dt$
Esperanza de X^2 ($E(X^2)$)	$E(X) = \sum_{x \leq x_i} x_i^2 \cdot P(X = x_i)$	$E(X) = \int_{-\infty}^{x} t^2 \cdot f(t)dt$
$Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$		

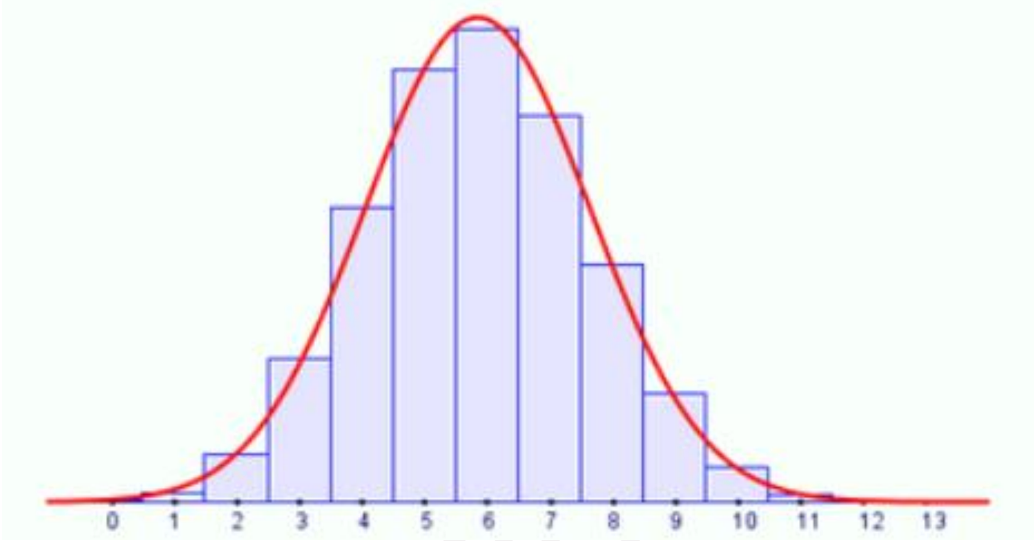


¿Pero quién es $f(t)$, la función de densidad?

www.vimat.info

vimat

Función de densidad

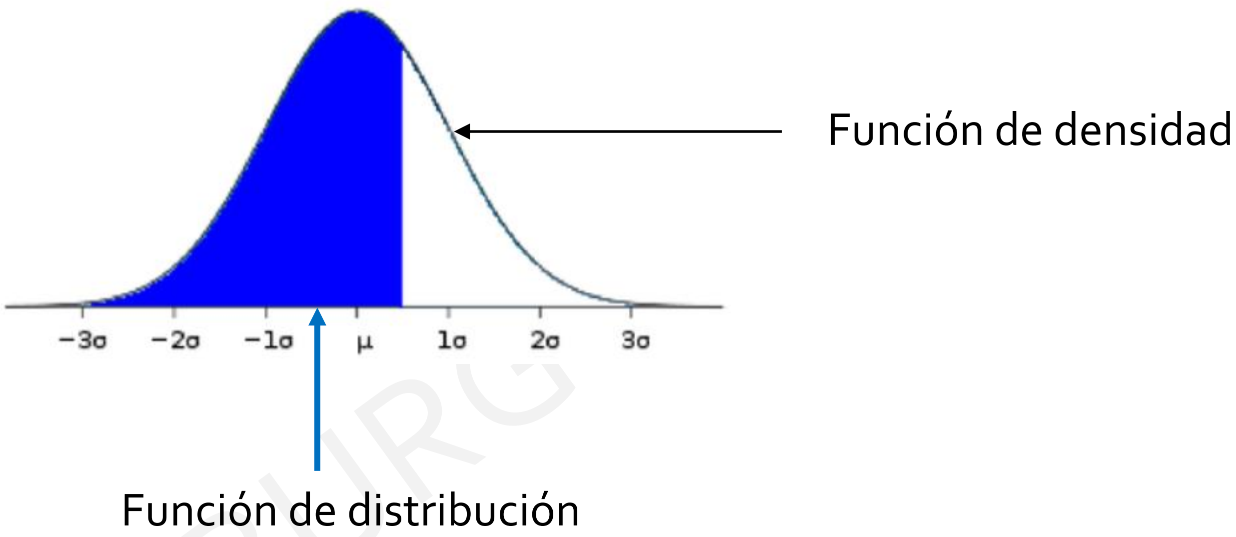


El dibujo anterior nos permite la comprensión de que significa una función de densidad.

- Si la variable es discreta, es la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales puesto en forma de histograma
- Si la variable es continua representa la probabilidad de que este en un intervalo determinado, por tanto, a mayor valor, más grande es la probabilidad de que la variable aleatoria tome esos valores y a menor valor, menos probabilidad de que la variable aleatoria tome esos valores.

Función de densidad

Relación función de densidad/función de distribución



- La función de distribución es el área de la función de densidad hasta un valor determinado.

Uniforme (discreta y continua)

<u>Uniforme discreta</u>: Se aplica a un experimento aleatorio en el que los posibles resultados son un número finito n de valores con la misma probabilidad

$$f(k) = P(X = k) = \frac{1}{n}$$

Ej: Lanzamiento de un dado, hay 6 valores con $\frac{1}{6}$ de probabilidad cada uno

<u>Uniforme continua</u>: Se aplica a un experimento aleatorio en el que los posibles resultados son números reales entre dos dados $[a, b]$, y la prob. de todos los intervalos de la misma amplitud son igualmente probables.

$$f(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ 0 & si\ x < a\ o\ x > b \end{cases}$$

Ej: Elegir un número aleatorio entre 0 y 3

BINOMIAL

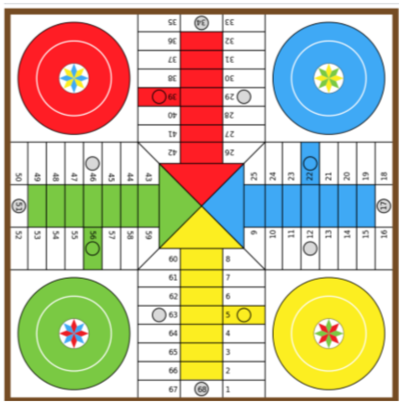
Binomial: Se aplica a un experimento aleatorio compuesto en el que cada experimento simple, tiene dos posibles resultados, éxito y fracaso, con probabilidades p y $1-p$, y en lo que estamos interesados es, en saber la probabilidad de k éxitos en n experimentos simples, así, esa probabilidad viene dada por la fórmula:

$$\boldsymbol{P(X=k)=\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}}$$

- La **binomial se puede aproximar por una normal** de media $\boldsymbol{\mu=np}$, y la desviación típica es $\boldsymbol{\sigma=\sqrt{np(1-p)}}$ en los siguientes casos si np y nq son mayores que 3.
- La **binomial se puede aproximar por una Poisson** si $\boldsymbol{n \geq 50\ y\ p \leq 0,1}$ y de parámetro $\boldsymbol{\lambda=np}$ **.**

BINOMIAL

<u>Ejemplo</u>: Vamos a jugar al parchís, para sacar una ficha necesito sacar un cinco ¿con que probabilidad sacare todas las fichas en las primeras 20 tiradas para sacar todas las fichas?



Sea X= "Número de cincos en 20 lanzamientos"

$$X \sim B\left(20; \frac{1}{6}\right) \quad n = 20, \quad p = \frac{1}{6}, \quad 1 - p = \frac{5}{6}$$

$$\boldsymbol{p(X \geq 4) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) - p(X = 2) - p(X = 3)}$$

$$\boldsymbol{p(X \geq 4) = 1 - 0,566 = 0,434}$$

$$\boldsymbol{p(X = 0) = \binom{20}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{20} = 0,026} \qquad \boldsymbol{p(X = 1) = \binom{20}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{19} = 0,104}$$

$$\boldsymbol{p(X = 2) = \binom{20}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{18} = 0,198} \qquad \boldsymbol{p(X = 3) = \binom{20}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{19} = 0,238}$$

MULTINOMIAL

Multinomial: Es una generalización de la distribución Binomial a análisis multivariante es la llamada multinomial, que se da cuando los n experimentos repetitivos que se producen no son de Bernoulli, sino que tienen un número k finito de posibles resultados (no solo éxito o fracaso) con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_k,$ y tengo k finitas variables en las que cada una mide el número de veces que ha ocurrido cada uno de los posibles resultados, así, la función de densidad conjunta de todas esas variables aleatorias será:

$$P(X_1 = x_1; X_2 = x_2; \ldots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! \cdot x_2! \ldots . x_k!} p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \ldots . p_k^{x_k}$$

$$\text{sabiendo que} \sum_{i=1}^{k} x_i = n$$

Ejemplo: Seguimos con el parchis, ¿con que probabilidad en las primeras 20 tiradas sacaremos 3 cincos y 2 seises?

Principales distribuciones de probabilidad

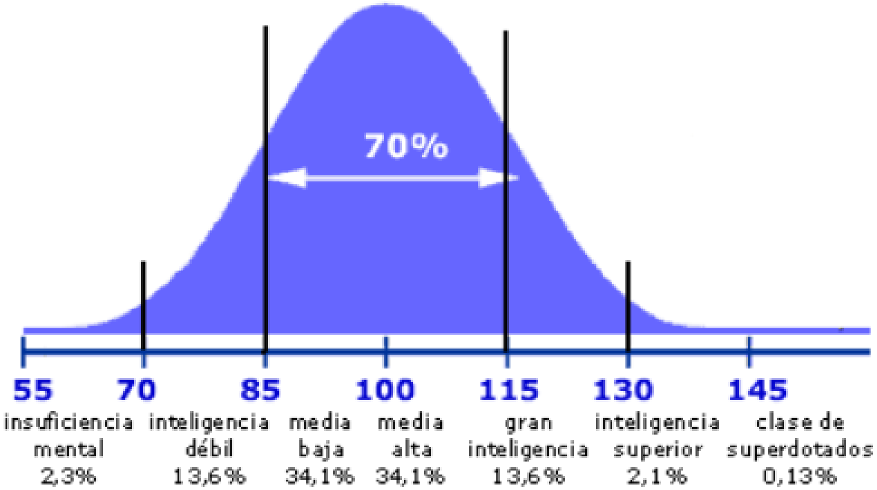
NORMAL

<u>Normal</u>: La distribución normal es una distribución con función de densidad continua y sirve para modelizar multitud de fenómenos o experimentos naturales, sociales, ...

Su función de densidad es la famosa **campana de Gauss**, y para hallar las diferentes probabilidades se utiliza una tabla creada a tal efecto que contiene los valores más comunes de $P(X \leq k)$ $(función\ de\ distribución\ normal)$ con dos decimales:

$$\boldsymbol{X \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

<u>Ejemplo</u>: CI

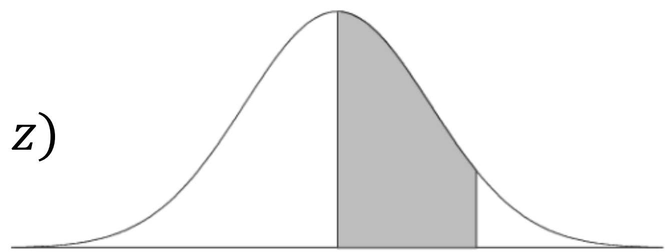


NORMAL

<u>Función de distribución Normal</u>: Se corresponde con la integral de la función de densidad, pero

$$Tipificación\ de\ la\ normal:\ X \sim N(\mu,\sigma) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

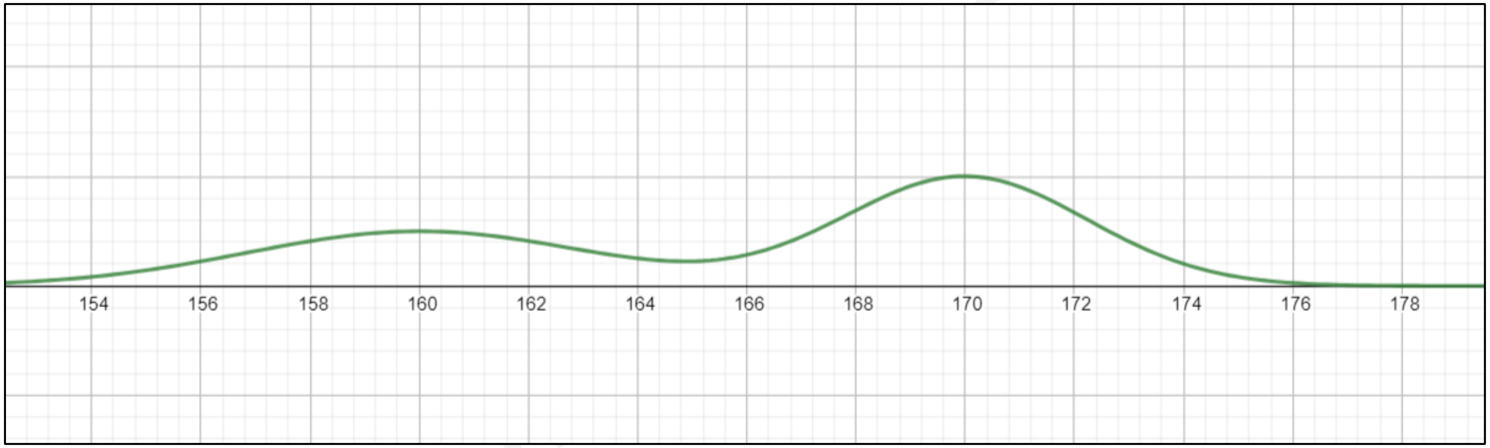
$$X \sim N(0,1) \Rightarrow p(X \leq z)$$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879

NORMAL

Ejemplo: Altura soldados del ejército español año 2007



Doble normal, doble campana de Gauss

GEOMÉTRICA

<u>Geométrica</u>: Esta distribución nos modeliza experimentos aleatorio para calcular la probabilidad de que ocurra un éxito por primera y única vez en el último ensayo que se realiza de un experimento repetitivo de Bernoulli.

Sea A un suceso de probabilidad $P(A) = p$ en un experimento de Bernoulli, y sea X la variable aleatoria que expresa el número de fracasos que tiene lugar en las repeticiones independientes de pruebas de Bernoulli, hasta que ocurre A por primera vez.

La variable X toma los valores de 1,2, …. (fracasos hasta el primer éxito).

$$\mathbf{f(x)}=\boldsymbol{P(X = x) = (1 - p)^{x} p}\ .$$

<u>Ejemplo</u>: de la página 6

Hipergeométrica

Hipergeométrica: Cuando se hace un muestreo de una población finita de éxitos y fracasos, los supuestos de un experimento binomial se satisfacen solo con exactitud solo si el resultado de cada prueba se observa y luego se reincorpora a la población antes de hacerse la siguiente observación. Sin embargo, en la práctica, lo usual es utilizar un muestreo sin reemplazo, es decir, seleccionar al azar n elementos diferentes de entre los N de elementos de la población.

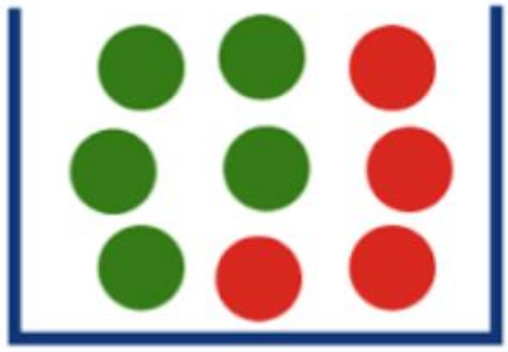
Así de una población de N elementos en los que sabemos que hay N_1 que cumplen el criterio de éxito y N_2 el de fracaso, queremos saben al elegir n de ellos cuantos éxitos tendremos.

$$P(X=x)=\frac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Hipergeométrica

Ejemplo: extracción sin reemplazamiento de 4 bolas de una urna con 9 bolas de dos colores distintos (4 rojas y 5 verdes), y en lo que estamos interesados es en una extracción de 4 bolas en las que nos preguntamos cuantas serán rojas, así, si X es la variable aleatoria definida X= "Nº de bolas rojas de las 4 extraídas"

$$P(X=1)=\frac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{4}{1}\binom{5}{3}}{\binom{9}{4}}$$

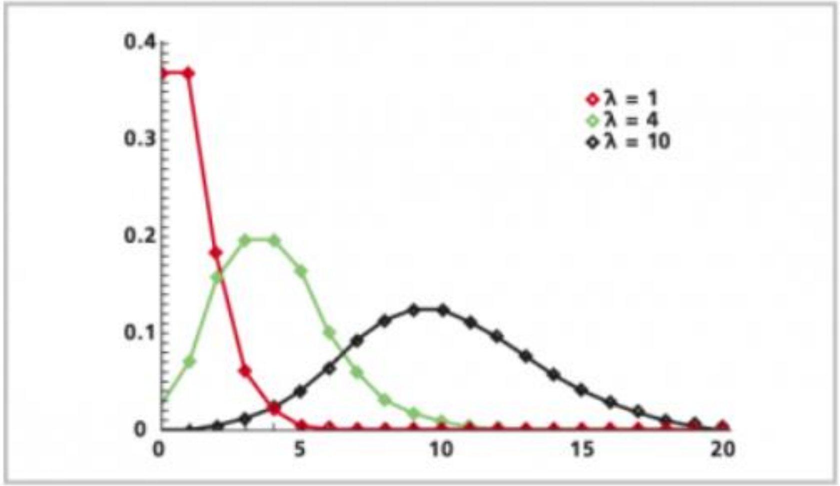


Principales distribuciones de probabilidad

POISSON

<u>Poisson</u>: Esta distribución nos modeliza el número de ocurrencias de un suceso en un periodo de tiempo determinado o en una región específica. Sus características son:

- Es una distribución discreta
- n, el número de ocurrencias posibles debe ser un número elevado
- Los distintos sucesos son independientes independientes
- La probabilidad de ocurrencia de eses suceso en ese tiempo es muy baja
- La probabilidad de k-éxitos (número entero positivo) depende de un parámetro $\boldsymbol{\lambda}$



$$f_\lambda(k) = p(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

POISSON

Ejemplo 1: Si un banco recibe en promedio 6 cheques sin fondo por día, ¿cuáles son las probabilidades de que reciba:

a) cuatro cheques sin fondo en un día dado

b) 10 cheques sin fondos en cualquiera de dos días consecutivos?

a) $\lambda = 6$ puesto que es el promedio

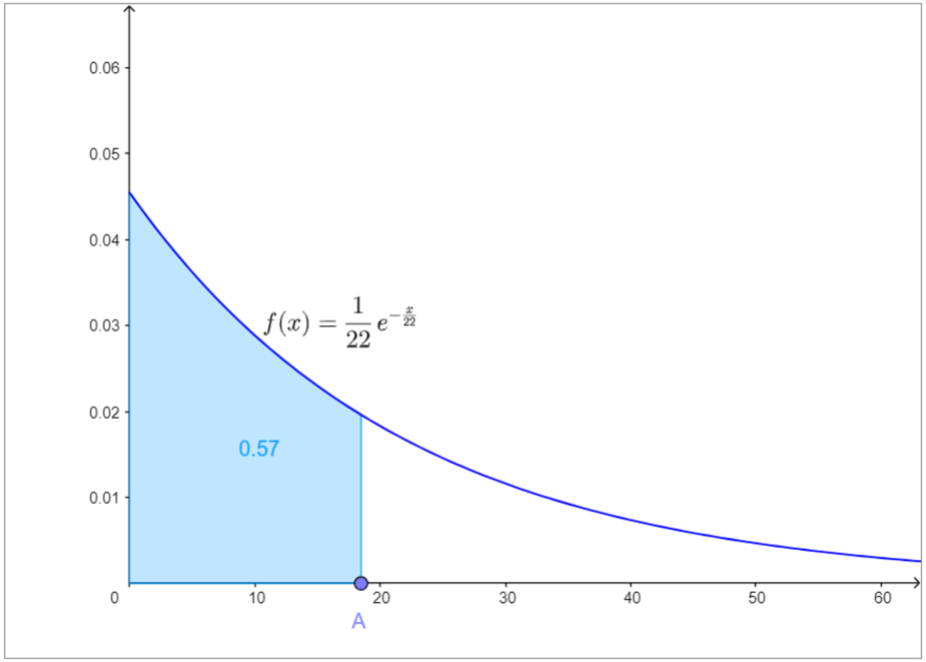
$$f_6(4) = p(X = 4) = \frac{e^{-6}6^4}{4!} = 0,1339$$

b) Sol: 0,104

Ejemplo real: Número de piezas de repuesto de entre 500000 que se deben comprar para tener en stock en el ejercito, que tengan consumo medio anual menos de 1

EXPONENCIAL

<u>Exponencial</u>: Esta distribución nos experimentos basados en tiempo de duración de máquinas o de supervivencia de seres vivos. Es una distribución continua.

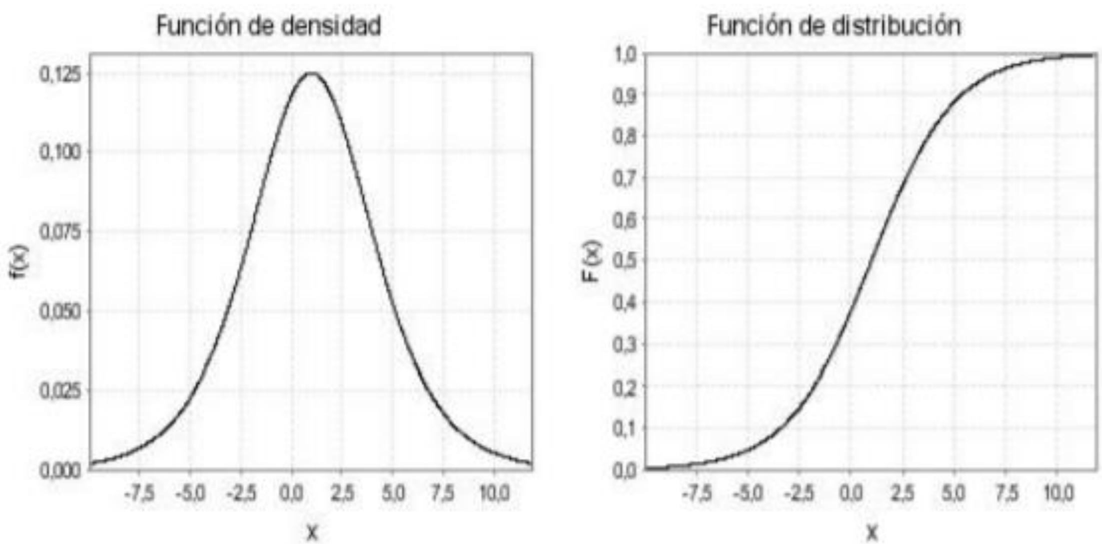


$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ \alpha e^{-\alpha x} & si > 0 \end{cases}$$

<u>Ejemplo</u>: Número de años de vida de un equipo musical. Obviamente, cuantos más años pasa, menos tiempo

DISTRIBUCIÓN LOGÍSTICA

Distribución logística: Si U es una variable uniforme continua en (0,1) entonces $X = \ln(\frac{U}{1-U})$ sigue lo que se llama una distribución logística. Modeliza crecimientos de células y expansión de población o pandemias.



Propiedades de los parámetros de una dist. de probabilidad

Esperanza de una variable aleatoria

- La esperanza de una constante en la misma constante: $\boldsymbol{E[c] = c}$.

- La esperanza de la suma de dos variables aleatorias es igual a la suma de sus esperanzas:
$$\boldsymbol{E[\,X + Y] = E[X] + E[Y]}$$

- La esperanza del producto de una constante por una variable aleatoria es igual al producto de la constante por la esperanza de la variable aleatoria:
$$\boldsymbol{E[aX] = aE[X]}.$$

- De las propiedades anteriores se deduce que:
$$\boldsymbol{E[aX + b] = aE[X] + b}$$
$$\boldsymbol{E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]}$$

- Si dos variables son independientes, entonces:
$$\boldsymbol{E[XY] = E[X] \cdot E[Y]}$$

- Si $\boldsymbol{g(X)}$, es una función de una variable aleatoria:
$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot P(X = x_i) \quad o \quad E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)dx$$

Propiedades de los parámetros de una dist. de probabilidad

VARIANZA

$$Var(X) = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$$

Recordemos que utilizando el apartado anterior:

$$EX^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \cdot P(X = x_i) \quad o \quad E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx$$

Propiedades:

- $\boldsymbol{Var(X) \geq 0}$
- $\boldsymbol{Var(k \cdot X) = k^2 \cdot Var(X)}$ para todo número real *k*.
- $\boldsymbol{Var(k) = 0}$ para todo número real *k*.
- $\boldsymbol{Var(a \cdot X + b) = a^2 \cdot Var(X)}$ para todo par de números reales *a* y *b*.
- $\boldsymbol{Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)}$ únicamente en el caso que *X* y *Y* sean independientes.

Resumen distribuciones de probabilidad

Distribución	Experimento	Esperanza	Varianza
Binomial	Repetición de experimentos de Bernoulli (éxito o fracaso) y nos interesa el número de éxitos. (la multinomial generaliza este experimento).	np	$np\,(1-p)$
Geométrica	Repetición de experimentos de Bernoulli (éxito o fracaso) y nos interesa el número de experimentos hasta el primer éxito	$1/p$	$\frac{1-p}{p^2}$
Hipergeométrica	Dividimos en dos las posibles extracciones sin reemplazamiento (no se repite el mismo experimento) y calcular la probabilidad de un número determinado de éxitos o fracasos.	np	$\frac{np(1-p)(N-n)}{n-1}$
Uniforme discreta	Posibles resultados son un número finito n de valores con la misma probabilidad	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{(n+1)(n-1)}{12}$
Uniforme continua	Extracción de un número al azar en un intervalo o similar	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normal	En los problemas que utilizan la distribución normal suele estar enunciado que una determinada variable sigue esa distribución.	μ	σ^2
Exponencial	La distribución exponencial suele describir tiempo de duración de máquinas o de supervivencia de seres vivos.	$1/\alpha$	$\frac{1}{\alpha^2}$
Poisson	Se utiliza para modelizar el número de situaciones que pueden ocurrir en un determinado intervalo de tiempo.	λ	λ
Multinomial	Repetición de experimentos con varios posibles resultados y nos interesa saber el número de ocurrencias de cada uno	$E(X_i) = np_i$	$\sigma_{ii} = np_i(1-p_i)$

ÍNDICE

Teorema central del límite

Teorema: Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independiente e igualmente distribuidas de media μ y desviación típica σ

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + X_2 \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{n\ grande} N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

La distribución de las **medias muestrales** tiende a una Normal con la misma media y desviación típica.

Ejemplo: La nota media de los exámenes de la EBAU sigue una distribución Normal de media 6.7 y varianza 1.25 En una clase de 25 alumnos cual es la probabilidad de que la media de los pesos sea mayor de 7:

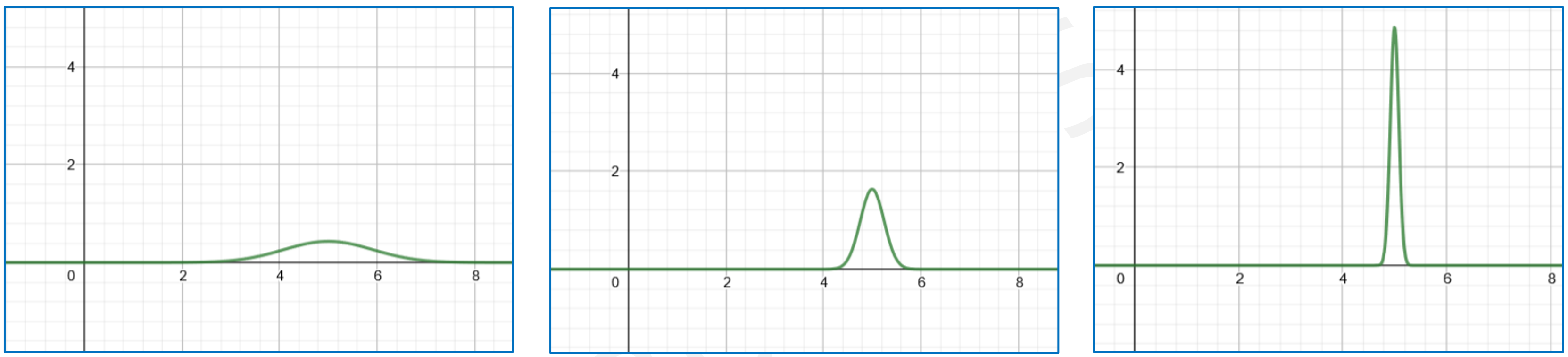
$$\bar{X}_{25} \sim N(6.7\,;0{,}25)$$

$$P(\bar{X}_{25} > 7) = 1 - P(\bar{X}_{25} \leq 7) \overset{above}{=} 1 - p\left(\frac{\bar{X}_{25} - 6.7}{0{,}25} \leq \frac{7 - 6.7}{0.25}\right) = 1 - p\left(\frac{\bar{X}_{25} - 6.7}{0{,}25} \leq 1.2\right) = 1 - 0.8849 = 0.1151.$$

Es excepcional

Teorema central del límite

$$N(5, \frac{1}{\sqrt{n}})$$



Incrementando el tamaño de la muestra n

https://www.geogebra.org/graphing/eupmbjcb

Desigualdad de Chebischev

Este resultado es útil para estimar una probabilidad cuando se desconoce la distribución de probabilidad (o ley) de una v.a. X.

Desigualdad: Si X es una v.a. con esperanza y varianza finitas, entonces para todo $k \geq 1$

$$P(|X - E(X)| \geq k) \leq \frac{Var(X)}{k^2}$$

o equivalentemente, $$P(|X - E(X)| < k) \geq 1 - \frac{Var(X)}{k^2}$$

Lo que viene a decir que la probabilidad de que se distancie una variable aleatoria de la Media es inversamente proporcional a la distancia pero teniendo en cuenta la varianza

ÍNDICE

Probabilidad condicionada

Definición: La probabilidad de A condicionada a B es la probabilidad de que ocurra el Suceso A sabiendo que ya ha ocurrido B

$$P(A\ /B)=\frac{P(A\cap B)}{p(B)}$$

La probabilidad condicionada es especialmente útil es experimentos compuestos

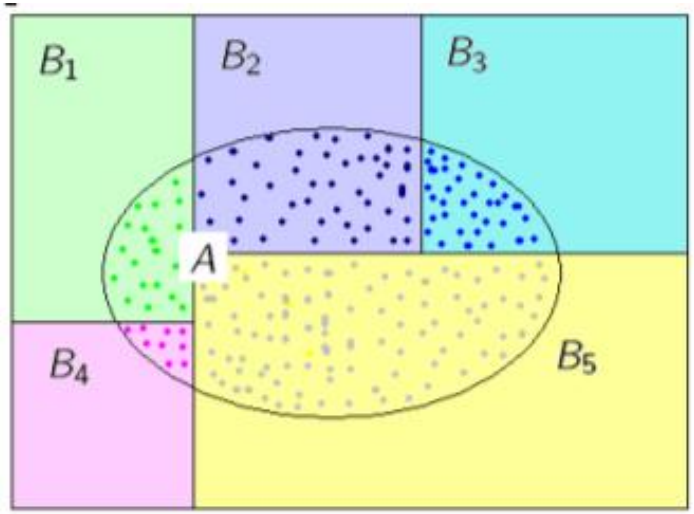
Ejemplo: Tiramos un dado y ponemos en una urna tantas bolas blancas como hayan salido en el dado. La urna tenía previamente una bola negra. Extraemos una bola de la urna ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea blanca sabiendo que ha salido un 2 en el dado?

Sea A el suceso "La bola extraída es blanca" y sea B el suceso "Ha salido el número 3 en la tirada del dado"

$$\boldsymbol{P(A\ /B)=\frac{P(A\cap B)}{p(B)}=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{6}}=\frac{3}{4}}$$

Probabilidad total

<u>Teorema de Bayes</u>: Sea $(\Omega, \sigma(\Omega), p)$ un espacio probabilístico, y sea $\{\boldsymbol{B}\}_{i\in I} \in \sigma(\Omega)$, con $I \subseteq \mathbb{N}$ una familia de sucesos que forma una partición disjunta finita o numerable de Ω, sea $A \in \sigma(\Omega)$ un suceso cualquiera, entonces:



$$\boldsymbol{p(A) = \sum_{i\in I} p(A \,/\, B_i) \cdot P(B_i)}$$

Teorema de Bayes

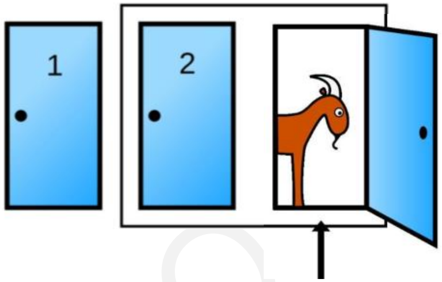
<u>Teorema de Bayes</u>: Sea $(\Omega, \sigma(\Omega), p)$ un espacio probabilístico, y sea $\{\boldsymbol{A_i}\}_{i \in I} \in \sigma(\Omega),$ con $I \subseteq \mathbb{N}$ una familia de sucesos que forma una partición disjunta finita o numerable de Ω, sea $B \in \sigma(\Omega)$un suceso cualquiera con $p(B) > 0$, entonces:

$$\boldsymbol{p(A_k \,/\, B) = \frac{p(B \,/\, A_k)p(A_k)}{\sum_{i \in I} p(B \,/\, A_i) \cdot P(A_i)}}$$

- $p(A_i)$ se llaman ***probabilidades a priori***
- $p(A_i \,/\, B)$ se denominan ***propiedades a posteriori***

Teorema de Bayes

Ejemplo: **Problema del Monty Hall**



En este concurso, el concursante escoge una puerta entre tres, y su premio consiste en lo que se encuentra detrás. Una de ellas oculta un coche, y tras las otras dos hay una cabra. Sin embargo, antes de abrirla, el presentador, que sabe dónde está el premio, abre una de las otras dos puertas y muestra que detrás de ella hay una cabra. Ahora tiene el concursante una última oportunidad de cambiar la puerta

¿Debe el concursante mantener su elección original o escoger la otra puerta? ¿Hay alguna diferencia?

ÍNDICE

Teorema de Bayes

<u>Ejemplo</u>: **Problema del Monty Hall**

Definamos como A, B y C las 3 puertas. Definamos dos variables aleatorias:
$X = \text{"}Puerta\ donde\ está\ el\ coche\text{"}$ $\quad Y = \text{"}Puerta\ que\ abre\ el\ presentador\text{"}$

Calculemos ahora la probabilidad de cada una de ellas utilizando el teorema de Bayes y el teorema de la probabilidad total

$$p(X = A\ /\ Y = B) = \frac{p(Y = B/\ X = A) \cdot p(X = A)}{p(Y = B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

$$p(X = B\ /\ Y = B) = \frac{p(Y = B\ /\ X = B) \cdot p(X = B)}{3/6} = \frac{0 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3}{6}} = 0$$

$$p(X = C\ /\ Y = B) = \frac{p(Y = B\ /\ X = C) \cdot p(X = C)}{3/6} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{3/6} = \frac{2}{3}$$

Estadística descriptiva/Estadística inferencial

Definición: La estadística descriptiva es un compendio de métodos que se utilizar para resumir las características de una población.
El objetivo es recopilar, organizar, analizar y presentar los datos de manera significativa.

Definición: La estadística inferencial se enfoca en extraer conclusiones sobre la población, sobre la base del análisis de la muestra y la observación

La inferencia estadística tiene como principales objetivos:
- Estimación de parámetros de la población
- Contrastes de hipótesis de la población

Estadística descriptiva unidimensional

Parámetros estadísticos muestrales

Sea X *una variable aleatoria y* $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ *datos obtenidos a partir de una* ***muestra*** *de tamaño* n:

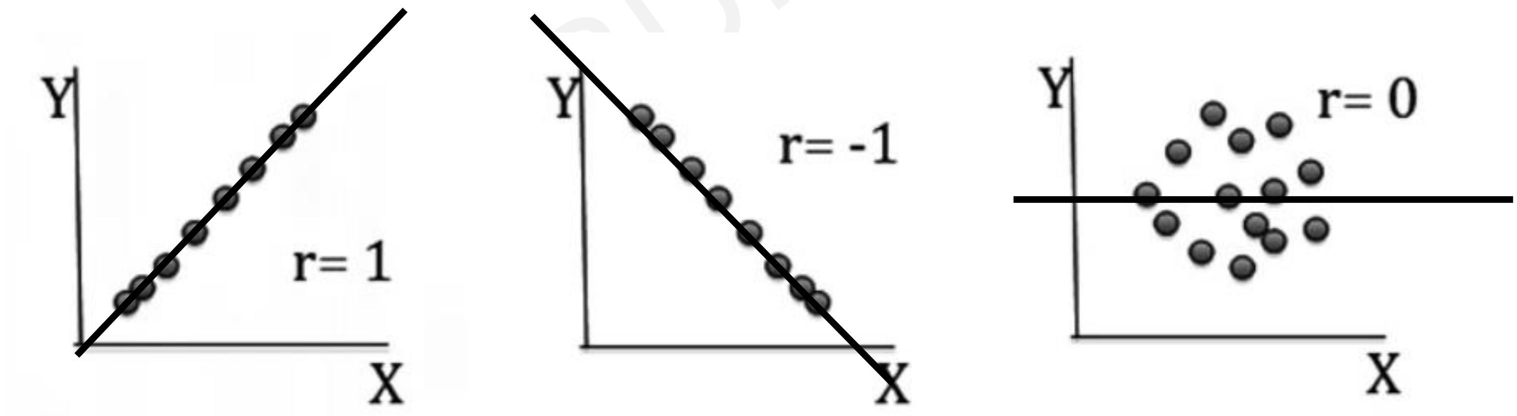
- **<u>Media muestral</u>:** $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots\ldots + x_n}{n}$
- **<u>Varianza muestral</u>:** $s^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - \bar{x})^2}{n}$
- **<u>Desviación típica:</u>** $s = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - \bar{x})^2}{n}}$
- **<u>Coeficiente de variación media</u>**: $v = \frac{s}{\bar{x}}$

ÍNDICE

Distribuciones Bidimensionales- Análisis de dos variables

Distribuciones bidimensionales: Partimos de dos variables aleatorias, caracteres medidos en una muestra y nos interesa ver la relación que hay entre las dos variables

Covarianza: indica el grado de variación conjunta de dos características y/o variables aleatorias. respecto a sus medias
Coeficiente de correlación lineal. Cuantifica el grado de correlación entre dos características o variables aleatorias. Su valor oscila entre -1 y 1.
Recta de regresión Lineal: Recta que se utiliza para aproximar la relación que existe entre dos características o variables aleatorias.



Distribuciones Bidimensionales conjuntas

Función de distribución conjunta: $F(x,y) = P(X \leq x; Y \leq y)$

- Si son dos variables discretas:

$$F(x,y) = \sum_{s \leq x} \sum_{t \leq y} P(X = s; Y = t)$$

- Si son dos variables continuas:

$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s,t) dt ds$ donde f es la función de densidad conjunta

Propiedades:

- $F(x,y) \geq 0$
- $\sum_s \sum_t P(X = s; Y = t) = 1$ o $\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s,t) dt ds = 1$

Distribuciones Bidimensionales conjuntas

Ejemplo: $F(x,y) = P(X \leq x; Y \leq y)$

X \ Y	-1	1
1	$1/6$	$1/3$
2	$1/12$	$1/4$
3	$1/12$	$1/12$

$$\sum_{x,y} P(X = x; Y = y) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = 1$$

Distribuciones Bidimensionales conjuntas

Distribuciones marginales

Definición: Dada una función de distribución conjunta, la distribución marginal de X es simplemente la ley de probabilidad de X haciendo **caso omiso** de la información referente a Y.
Las funciones de densidad de las distribuciones marginales serían:

$f(x) = \sum_t P(X = x; Y = t)$ y $g(y) = s \sum P(X = s; Y = y)$

$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dt$ y $g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, y) dy$

Las distribuciones marginales en el fondo son distribuciones condicionadas

Distribuciones Bidimensionales conjuntas

Ejemplo:

Distribución conjunta:

X \ Y	−1	1
1	1/6	1/3
2	1/12	1/4
3	1/12	1/12

Distribuciones marginales

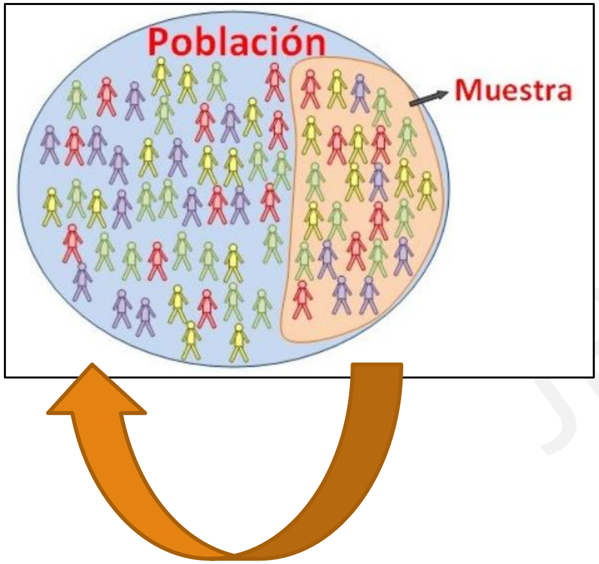
X \ Y	−1	1	$p_{i\bullet}$
1	1/6	1/3	1/2
2	1/12	1/4	1/3
3	1/12	1/12	1/6
$p_{\bullet j}$	1/3	2/3	1

ÍNDICE

Inferencia estadística

<u>Población</u>: Conjunto de personas, países, objetos, animales, etc,… sobre los cuales se estudia una determinada característica

<u>Muestra</u>: Se le llama a una parte de la población (representativa o no)



Inferencia estadística

¿Qué queremos estimar? Media/Desviación típica?

Necesitamos un **estimador** desde la muestra

Ejemplos: Para estimar la media poblacional (μ), utilizaremos la **media muestral** $\bar{x}$.

La **varianza muestral** s^2, sin embargo, no es un estimador centrado de la varianza poblacional

Inferencia estadística

ESTIMACIÓN DE LA MEDIA / INTERVALOS DE CONFIANZA

Estudiando los datos de la muestra, queremos estimar la media de una población, para lo cual calcularemos la media y varianza de esa muestra.

No se estima puntualmente, se estima con intervalos y la probabilidad de que la media este en ese intervalo, es lo que llamaremos **grado de confianza**, por eso se llamar **intervalos de confianza**, así:

Intervalo de confianza $\mathbf{1-\alpha}$ para la media μ $(media\ poblacional)$ será si $\bar{x}$ y s^2 son la media y varianza de una muestra de tamaño n:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

- Si nos dieran la varianza poblacional, la utilizaríamos en lugar de la varianza muestral
- $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es el valor de la tabla de la normal correspondiente a probabilidad $\frac{\alpha}{2}$

ESTIMACIÓN DE LA MEDIA / INTERVALOS DE CONFIANZA

Ejemplo: la recaudación diaria de los comercios de un barrio determinado es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de desviación típica 328 euros. Se ha extraído una muestra de 100 comercios de dicho barrio, obteniéndose que la recaudación diaria media asciende a 1248 euros.
Calcula el intervalo de confianza para la recaudación diaria media con un nivel de confianza del 99%.

$$\left(1248 - 2,575\frac{328}{\sqrt{100}}, 1248 + 2,575\frac{328}{\sqrt{100}}\right) = (1163.54\,, 1332.46)$$

Con una confianza del 99% la media de la recaudación de los comercios de eses barrio estará en ese intervalo

Inferencia estadística

ESTIMACIÓN DE LA MEDIA / INTERVALOS DE CONFIANZA

Ejemplo: LAS VIUDAS ESCOCESAS – EL PRIMER FONDO DE PENSIONES

Collin Mclaurin

https://www.curistoria.com/2017/03/los-religiosos-que-idearon-un-seguro.html

ESTIMACIÓN DE PROPORCIONES

En este caso nuestro objetivo es estimar que proporción de individuos de una población poseen una determinada característica analizando datos a partir de una muestra de tamaño n.
Estimamos al igual que para la media no puntualmente, sino con intervalos.
Si la proporción de esa característica en la muestra es p_r , el intervalo de confianza con grado de confianza $1-\alpha$ para estimar esa proporción en la población será:

$$\left(\boldsymbol{p_r - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}, p_r + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}}\right)$$

ESTIMACIÓN DE PROPORCIONES

<u>Ejemplo</u>: En una encuesta de opinión, durante una campaña electoral en una ciudad, se preguntó a una muestra aleatoria de 400 personas a cuál de los candidatos pensaban votar y 160 declararon que votarían a un determinado partido A.

a) Obtén un estimador puntual de esa proporción:

$$\boldsymbol{p_r = \frac{160}{400} = 0,4}$$

b) Calcula el intervalo de confianza del 90% para la proporción de ciudadanos que votará a ese partido A en las elecciones.

$$\boldsymbol{\left(0,4 - 1,96\sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{400}}, 0,4 + 1,96\sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{400}}\right) = (0.352\ , 0.448)}$$

c) Si la población es de 5000 personas, y por cada 50 votos se elige un concejal, con una confianza del 90%, ¿Cuántos concejales tendrá el partido A?

$$\boldsymbol{\left(0.35 \cdot \frac{5000}{50}, 0.45 \cdot \frac{5000}{50}\right) = (35.2, 44.8) = (35, 45)}$$

Con un grado de confianza del 90% obtendrá entre 35 y 35 concejales.

Contrastes de hipótesis

Contrastes de hipótesis

<u>Objetivos:</u> Queremos ver si una hipótesis determinada de un parámetro estadístico es verdad a partir de los datos de una muestra.
La hipótesis que tenemos la llamaremos $\boldsymbol{H_0}$: $\boldsymbol{Hip\acute{o}tesis\ nula}$ y a que no ocurra lo llamaremos $\boldsymbol{H_1}$: $\boldsymbol{Hip\acute{o}tesis\ alternativa}$.

Podemos encontrarnos dos motivos por los cuales rechazo la hipótesis nula:

- Porque la muestra no es suficientemente significativa
- Porque los datos de la muestra nos conducen a la hipótesis alternativa

Debemos definir un nivel de significación para aceptar o rechazar una hipótesis: 90%, 95%,…
Al igual que en la estimación de parámetros, lo haremos con intervalos, así definiremos intervalos donde aceptaremos la hipótesis nula y donde no, estos se llaman regiones de aceptación o rechazo.

El procedimiento de test de hipótesis a la inferencia estadística, está muy relacionado con la estimación del intervalo de confianza de la variable aleatoria $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Por tanto, para constrastar la media utilizaremos $\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$

Contrastes de hipótesis

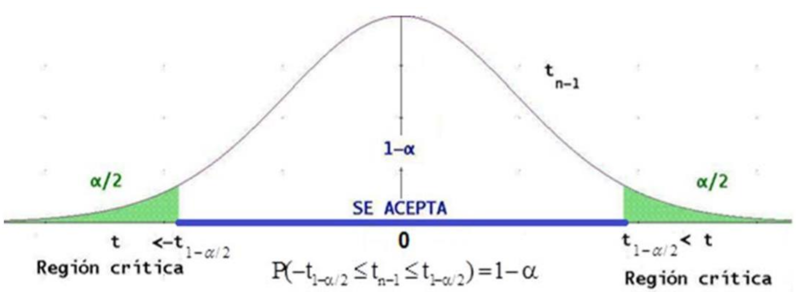
<u>Ejemplo</u>: Para contrastes de la media con n pequeño se utiliza la distribución t student de n-1 grados de libertad si la muestra tiene tamaño n. Si n es grande utilizaremos la distribución normal.

Se hace un envío de latas de conserva, de las que se afirma que el peso medio es de 1000 g. Examinada una muestra de 5 latas, se han obtenido los siguientes datos: media 998 g y varianza muestral 19,6. ¿Puede mantenerse la hipótesis de que μ=1000, con un nivel de significación α=0,05? Obtener un intervalo de confianza al 95% para la media.

Contrastamos la hipótesis utilizando la distribución $t\ de\ student$ porque n=5 es pequeño:

$$\begin{cases} H_0 : \ \mu = 1000 \\ H_1 : \mu \neq 1000 \end{cases}$$

Datos: $n = 5,\ \bar{x} = 998,\ s^2 = 19.6\ , s = 4,.43\ ,\ 1 - \alpha = 0{,}95\ ,\ t_{0.975,4}$=2.776



El intervalo de aceptación será:

$$\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2},5-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2},5-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$\left(998 - 2.776 \cdot \frac{4.43}{\sqrt{5}}, 998 + 2.776 \cdot \frac{4.43}{\sqrt{5}}\right) =$$

$(992.48, 1003.51)$, **por lo tanto, aceptamos H_0**

ÍNDICE

1. Introducción a la probabilidad y estadística
2. Axiomatización- Espacio probabilístico
3. Variables aleatorias
4. Distribuciones de probabilidad unidimensionales
5. Algunos teoremas importantes
6. Probabilidad condicionada/Prob. Total/Bayes
7. Estadística descriptiva unidimensional
8. Estadística descriptiva bidimensionales
9. Estadística inferencial
10. **Algunos problemas típicos**

Algunos problemas típicos

EL COMPLEMENTARIO

En una oposición hay 71 temas y se sacan 5 bolas. Si un alumno se estudia 20 temas, ¿cual es la probabilidad de que caiga algún tema de los que se ha estudiado?

$$\frac{51}{71} \quad \frac{50}{70} \quad \frac{49}{69} \quad \frac{48}{68} \quad \frac{47}{67}$$

Calcular el complementario es sencillo

$$p(\text{Caiga Tema estudiando 20}) = 1 - \frac{51}{71}\cdot\frac{50}{70}\cdot\frac{49}{69}\cdot\frac{48}{68}\cdot\frac{47}{6}7 = 0.81958$$

Pero realmente este escenario es el caso en el que fueran variaciones y nos importara el orden, pero realmente no es así

$$p(\text{Caiga Tema estudiando 20}) = 1 - \frac{\binom{20}{0}\binom{51}{5}}{\binom{71}{5}} = 0.81958 = 0.81958$$

$$p(\text{Caiga Tema estudiando 20}) = \frac{\binom{20}{1}\binom{51}{4} + \binom{20}{2}\binom{51}{3} + \binom{20}{3}\binom{51}{2} + \binom{20}{4}\binom{51}{1} + \binom{20}{5}\binom{51}{0}}{\binom{71}{5}} = 0.81958$$

Algunos problemas típicos

EL COMPLEMENTARIO

Paradoja del cumpleaños: probabilidad de que en n personas se repita un cumpleaños

el cálculo del complementario es sencillo

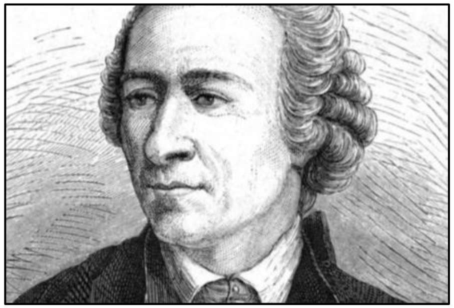
$$\frac{365}{365} \quad \frac{364}{365} \quad \frac{363}{365} \quad \frac{362}{365} \quad \frac{361}{365} \quad \cdots\cdots\cdots \quad \frac{365-n+1}{365}$$

$$p(\text{Coincidan } cumpleaños) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \cdots (365-n+1)}{(365)^n}$$

$Para\ n = 30\ es\ 0.71\ y\ para\ n = 50\ es\ 0.97$

Algunos problemas típicos

CARTAS EXTRAVIADAS



Una persona ha escrito n cartas a n personas distintas, escribe las direcciones de estas en n sobres y mete “sin mirar” (al azar) las n cartas en los n sobres. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 1 carta acabe en el sobre correcto, es decir, con la dirección que le corresponde?

Sea $A_i =$ Coindice la carta i–ésima", y sea $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \ldots \cup A_n$ la probabilidad que nos pide., y como no son sucesos incompatibles, si no que pueden coincidir una o varias cartas, hay que utilizar el principio de inclusión/exclusión.

$$p(A) = p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \ldots \cup A_n) = \sum_{i_1=1}^{n} p\left(A_{i_1}\right) - \sum_{i_1,i_2=1}^{n} p\left(A_{i_1} \cap A_{i_2}\right) + \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{n} p\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}\right)$$

$$+ \cdots .. + (-1)^{n-1} \cdot \sum_{i_1,i_2,i_3,\ldots i_n=1}^{n} p\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \ldots . \cap A_{i_n}\right) =$$

$$= \frac{\binom{n}{1}(n-1)!}{n!} - \frac{\binom{n}{2}(n-2)!}{n!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}\binom{n}{n}}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1}$$

Nº de Euler

Algunos problemas típicos

JUGANDO AL BLACKJACK

Reglas básicas:

1. Hay que pedir cartas hasta aproximarse a 21(Blackjack) lo más cerca posible.
2. La mesa siempre pide cartas hasta llegar hasta mínimo 16.
3. En caso de cartas iguales gana la mesa
4. Los ases valen 1 u 11 según interese y todas las figuras 10

Tabla Estrategia Básica (Varios Mazos)

Carta Descubierta del Crupier

Mano del Jugador		2	3	4	5	6	7	8	9	10	A
Cartas Duras	5-8	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
	9	P	D	D	D	D	P	P	P	P	P
	10	D	D	D	D	D	D	D	D	P	P
	11	D	D	D	D	D	D	D	D	D*	P
	12	P	P	Q	Q	Q	P	P	P	P	P
	13	Q	Q	Q	Q	Q	P	P	P	P	P
	14	Q	Q	Q	Q	Q	P	P	P	P	P
	15	Q	Q	Q	Q	Q	P	P	P	P/R	P
	16	Q	Q	Q	Q	Q	P	P	P/R	P/R	P/R
	17-20	Q	Q	Q	Q	Q	Q	Q	Q	Q	Q
Cartas Blandas	A,2	P	P	P	D	D	P	P	P	P	P
	A,3	P	P	P	D	D	P	P	P	P	P
	A,4	P	P	D	D	D	P	P	P	P	P
	A,5	P	P	D	D	D	P	P	P	P	P
	A,6	P	D	D	D	D	P	P	P	P	P
	A,7	Q	D/Q	D/Q	D/Q	D/Q	Q	Q	P	P	P
	A,8	Q	Q	Q	Q	Q	Q	Q	Q	Q	Q
	A,9	Q	Q	Q	Q	Q	Q	Q	Q	Q	Q

P Pedir Q Quedarse
P/R Rendirse si esta permitido, si no Pedir.
D Doblar si esta permitido, si no Pedir.
D/Q Doblar si esta permitido, si no Quedarse.
* En el BlackJack Europeo, No Doblar, Pedir Carta.

Estrategias:

- Hacer lo mismo que la mesa, entonces, por la regla 3. La probabilidad de que gane la mesa es un 53% y el jugador un 47%.
- Estrategia básica: Tabla de la izquierda:
  Con ella la mesa gana con prob. 50,4% y el jugador 48,6%
- Estrategia básica contando Hi-LO (sólo es válida si no hay barajadores automáticos). 49,5% para la banca y el **50,5% para el jugador**.

Rainman:
https://youtu.be/3V9lie029xg

https://www.math4all.es/las-matematicas-del-blackjack/