B1. Continuidad, derivabilidad y teoremas	
1	Can00. Calcule: $$\lim_{x\to\infty}\frac{x+senx}{x-senx}$$
2	Cat97. Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por: $$f(x)=\begin{cases} x\cdot sen\dfrac{\pi}{x} & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0\end{cases}$$ a) Estudiar su continuidad y derivabilidad en el origen. b) Determinar las características gráficas más relevantes (intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, etc.) y representarla gráficamente.
3	Cat98. Se considera la función g, real de variable real, dada por: $$g(x)=\frac{\lvert L(1+senx)\rvert}{x},\ \text{para cada } x\neq 0$$ a) ¿Es posible definir $g(0)$ de tal forma que g sea continua en dicho punto? b) Determinar los elementos gráficos más relevantes (crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos, etc.) de la función f dada por: $$f(x)=\lvert L(1+senx)\rvert$$ (El apartado b está hecho en la ficha 1)
4	Val01. Sabiendo que: $$m=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$ Calcule los valores de $k\in\mathbb{C}$ para los que la ecuación $x^3+kx-4em=0$ tiene una solución real. *NOTA: el cálculo de m requiere técnicas que se verán en una ficha más adelante. Por tanto, prueba a hacer este ejercicio sabiendo el valor de m, que es $m=e^{-1}$.*
5	CM04. Sea la ecuación $Lx-\frac{x}{\lambda}=0$, con $\lambda\in\mathbb{R}$ y $\lambda\neq 0$. a) Demostrar que existe λ para el que la ecuación anterior no tiene solución, y además no es único. b) Determínese en función de λ el número de soluciones de la ecuación.
6	Cat00. Consideremos la función $f(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definida por: $$f(x)=Lx-x+3$$ a) Demostrar que la ecuación $f(x)=0$ tiene exactamente dos soluciones a y b tales que $a<1<b$. b) Dado un punto $x_1\in(1,b)$, sea (x_n) la sucesión dada por $x_{n+1}=3+Lx_n$ para $x\geq 1$. Demostrar que $x_n\in(1,b)$ para cada $n\geq 1$ y que (x_n) es convergente. ¿Cuál es su límite?
7	Mad 15. Responda razonadamente a las siguientes cuestiones: a) Represente gráficamente la función real de variable real definida por: $$f(x)=\frac{x}{Lx}$$ b) Determine, según los valores de k, el número de soluciones de la ecuación: $$x-kLx=0$$ c) Estudie si la sucesión de números reales (a_n) definida por la recurrencia: $$a_1=e^{3/2},\ a_{n+1}=\frac{a_n}{La_n},\ n\geq 1$$ Es convergente y, en caso afirmativo, calcule su límite.

Soluciones ficha B1. Continuidad, derivabilidad y teoremas

1 Can00. Calcule:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+senx}{x-senx}$$

Al ser *senx* una función acotada, numerador y denominador tienden a infinito, por lo que tenemos una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Para resolverla tenemos dos formas:

FORMA 1 (incorrecta)
Aplicamos L'Hopital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+senx}{x-senx}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+cosx}{1-cosx}$$

El problema con el coseno es que es una función oscilante. No podemos aplicar LHopital por segunda vez al no tener $\frac{0}{0}$ ni $\frac{\infty}{\infty}$ (ni su versión $0\cdot\infty$)

FORMA 2 (buena)
Dividimos numerador y denominador entre x, de forma que tenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{senx}{x}}{1-\frac{senx}{x}}$$

El problema queda reducido a calcular el límite de $\frac{senx}{x}$, que al ser una función acotada entre ∞, el resultado es cero, por lo que:

$$\boxed{L=1}$$

2 Cat97. Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por:

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot sen\frac{\pi}{x} & si\ x\neq 0\\ 0 & si\ x=0\end{cases}$$

a) Estudiar su continuidad y derivabilidad en el origen.
b) Determinar las características gráficas más relevantes (intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, etc.) y representarla gráficamente.

El apartado b está hecho en la ficha de representación de funciones, y no lo necesitamos en este ejercicio, aunque lo mostraremos para ver los resultados del apartado a.
Para estudiar la continuidad en el origen debe cumplirse que:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$$

El valor de la función es $f(0)=0$, y los límites se calculan ambos en el primer tramo, al no ser x igual a cero sino tender a cero. Por tanto, para ver si es continua basta con demostrar si:

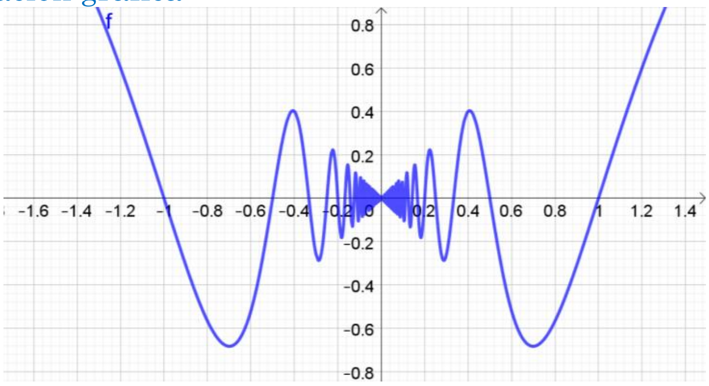
$$\lim_{x\to 0}\left[x\cdot sen\left(\frac{\pi}{x}\right)\right]=0\cdot(acotado)=0$$

El siguiente paso es comprobar que la función es derivable. Para ello recurrimos a la definición:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot sen\left(\frac{\pi}{h}\right)-0}{h}=\lim_{h\to 0}sen\left(\frac{\pi}{h}\right)$$

Este límite no se puede calcular, ya que la función seno oscila cuando su argumento se hace indefinidamente grande. Por tanto, la función no es derivable en el origen.

Vemos su representación gráfica:



Donde se aprecia que no está claro, ni puede estarlo, el comportamiento de la función cerca del origen.

3 Cat98. Se considera la función g, real de variable real, dada por:

$$g(x)=\frac{|L(1+senx)|}{x},\text{ para cada } x\neq 0$$

a) ¿Es posible definir $g(0)$ de tal forma que g sea continua en dicho punto?

b) Determinar los elementos gráficos más relevantes (crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos, etc.) de la función f dada por:

$$f(x)=|L(1+senx)|$$

(El apartado b está hecho en la ficha 1)

Para que la función sea continua, no tenemos más que calcular el límite. No obstante, el problema aquí es que tenemos un valor absoluto, que tenemos que ver si afecta o no al problema.

Determinamos cuando el argumento del logaritmo será positivo o negativo. Obviamente, no existirá para valores negativos. Así, para que exista:

$$1+senx=0\Rightarrow senx=-1\Rightarrow x=\cdots,-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\dots$$

Para que sea positivo o negativo el valor de referencia es el 1, pues $\log 1^- < 0$ y $\log 1^+ > 0$, así que:

$$1+senx=1\Rightarrow senx=0\Rightarrow x=\cdots-\pi,0,\pi\dots$$

Vemos que la existencia no nos afecta, pues nuestro límite hay que calcularlo en cero, pero sí lo hace la positividad, por lo que habrá que hacer dos límites, uno en cada lado:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|L(1+senx)|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{L(1+senx)}{x}=\frac{0}{0}\xrightarrow[L'Hop]{}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+senx}\cdot cosx}{1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{cosx}{1+senx}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|L(1+senx)|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-L(1+senx)}{x}=\cdots=-1$$

La función, por tanto, no es derivable para ningún $g(0)$ pues sus derivadas laterales no coinciden.

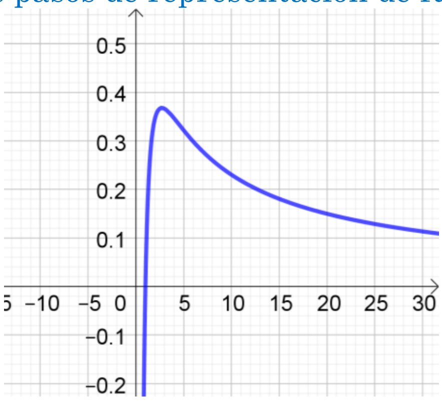
4 Val01. Sabiendo que:

$$m=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

Calcule los valores de $k\in\mathbb{C}$ para los que la ecuación $x^3+kx-4em=0$ tiene una solución real.

	NOTA: el cálculo de m requiere técnicas que se verán en una ficha más adelante. Por tanto, prueba a hacer este ejercicio sabiendo el valor de m, que es $m = e^{-1}$.
	Si obviamos el cálculo de m (que haremos en la ficha de sumas de Riemann), tomando el resultado $m = e^{-1}$, tenemos que la ecuación a analizar es: $$x^3 + kx - 4 = 0$$ El primer paso es ver qué ocurre con $k \in \mathbb{C}$. Para ello, y dado que buscamos soluciones reales, supongamos que k es de la forma $k = a + bi$. Tenemos que: $$x^3 + (a + bi)x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 + ax - 4 = 0 \\ bix = 0 \end{cases}$$ A la vista de la segunda ecuación, sacamos en claro que hay dos opciones: o bien $x = 0$, es decir, una de las raíces buscadas es cero, o lo es b. Pero x no puede ser cero, porque no es solución de la ecuación. Por tanto la única opción es que $b = 0$, es decir, $k \in \mathbb{R}$. Pasamos a la segunda parte. Es sencillo ver cómo, si definimos una función auxiliar $f(x) = x^3 + kx - 4$, y usando Bolzano: $$f(0) = -4 < 0 \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty > 0\ \forall k$$ Así, por el teorema de Bolzano demostramos que existe **al menos** una solución real en el intervalo $(0, \infty)$ de la función, es decir, una solución a la ecuación planteada. Ahora bien, el problema no deja claro si pide los valores de k para los que tiene **solo una** solución real, o bien para los que tiene **una (al menos)**. Si es el segundo caso, ya estaría demostrado haciendo uso de Bolzano. Bastaría que k fuese un valor real. Si es el primer caso, más interesante, recurrimos a la derivada: $$f'(x) = 3x^2 + k$$ La única forma de que la función sea estrictamente creciente, y por tanto (habiendo demostrado que tiene al menos una solución), tan solo puede tener una raíz, es que la derivada no pueda igualarse a cero (no existan máximos ni mínimos). Esto ocurrirá siempre que $k > 0$, estrictamente positiva. En el caso $k = 0$ la ecuación tiene un punto singular en $x = 0$. Sin embargo, al calcular la derivada en torno a dicho punto, se ve que siempre es positiva, por lo tanto, la solución también es única. Así pues, para que la solución sea única: $$\boxed{k \in [0, \infty)}$$
5	CM04. Sea la ecuación $Lx - \frac{x}{\lambda} = 0$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\lambda \neq 0$. a) Demostrar que existe λ para el que la ecuación anterior no tiene solución, y además no es único. b) Determínese en función de λ el número de soluciones de la ecuación.
	Manipulamos la ecuación de forma que quede en la forma: $$\ln x = \frac{x}{\lambda} \Rightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{\lambda}$$

Pero esta es la función que ya vimos en un problema anterior (problema 7 ficha 1A), que dibujada queda, siguiendo los pasos de representación de funciones:



Recordamos que el máximo de esta función se sitúa en el punto $\left(e, \frac{1}{e}\right)$

Ahora bien, para que esta función corte con la horizontal $y = \frac{1}{\lambda}$ pueden ocurrir cuatro situaciones:

i) Si $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{e}$, no hay soluciones pues la recta horizontal no se cruza con la función. Despejando: $\lambda < e$, pero como $\lambda > 0$ para que se cumpla esta ecuación, llegamos finalmente a que $\boxed{\lambda \in (0, e): 0\ soluciones}$

ii) Si $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{e}$, es decir, $\lambda = e$, tenemos una única solución (justo en el máximo), que es $x = e$: $\boxed{\lambda = e: 1\ solución, x = e}$

iii) Si $\frac{1}{\lambda} \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$, o lo que es lo mismo, $0 < \frac{1}{\lambda} < \frac{1}{e}$, es decir, $\lambda \in (e, \infty)$, tendremos dos soluciones: $\boxed{\lambda \in (e, \infty): 2\ soluciones}$

iv) Si $\frac{1}{\lambda} < 0$, es decir, $\lambda < 0$, tenemos de nuevo una única solución: $\boxed{\lambda < 0: 1\ solución}$

v) Hemos descartado estudiar el caso $\lambda = 0$ por hipótesis del enunciado.

La respuesta al apartado a está en el primer caso. Todo lo que sea entre 0 y e (no es única), da como resultado que no hay solución.

La respuesta al apartado b es el desarrollo anterior completo.

6 Cat00. Consideremos la función $f(0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = Lx - x + 3$$

a) Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente dos soluciones a y b tales que $a < 1 < b$.

b) Dado un punto $x_1 \in (1, b)$, sea (x_n) la sucesión dada por $x_{n+1} = 3 + Lx_n$ para $x \geq 1$. Demostrar que $x_n \in (1, b)$ para cada $n \geq 1$ y que (x_n) es convergente. ¿Cuál es su límite?

La función dada es continua en su dominio, pues el logaritmo nunca admitirá valores negativos. Representamos rápidamente la forma de la función:

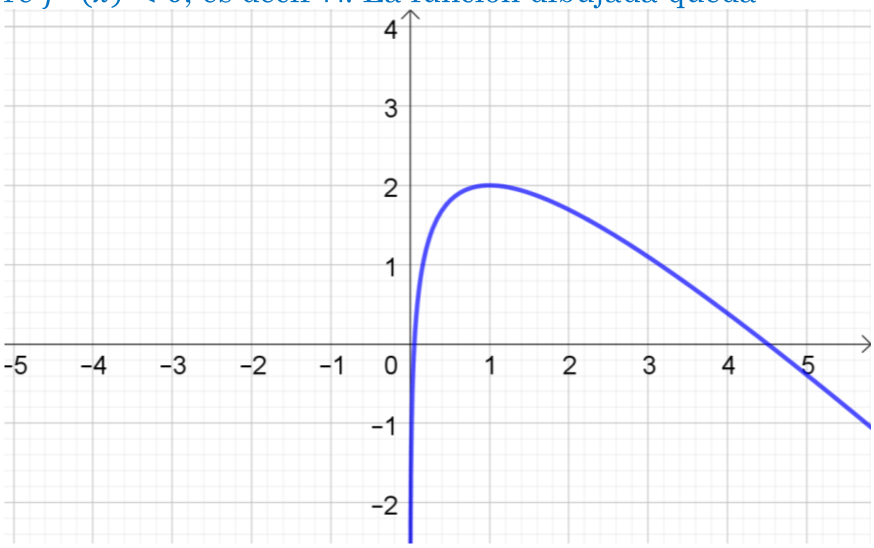
i) Dominio: $Dom f(x) = (0, \infty)$

ii) Puntos de corte: en OX no puede tener, en OY es justo el problema planteado.

iii) Asíntotas: Vertical en $x = 0$, pues:

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$

Horizontal no tiene, pues $\lim_{x \to \infty} = -\infty$, pero es interesante saber que la función es negativa tanto en 0^+ como en ∞.

	Oblicua tampoco tiene: $$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x - x + 3}{x} = -1$$ $$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} [\ln x - x + 3 + x] = \lim_{x\to\infty} [\ln x + 3] = \infty$$ Es decir, tendería a una recta oblicua con pendiente -1, pero cuya ordenada en el origen se encuentra en el infinito. Es decir, no tiene. iv) Monotonía: $$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$$ Igualando a cero: $$\frac{1}{x} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$ Vemos, además, que es un máximo, a la vista de los resultados anteriores. Un punto por debajo del 1 puede ser el 0^+ calculado antes, y un punto por encima puede ser el límite en el infinito. Dado que ambos son negativos, y tienden a menos infinito, este punto debe ser un máximo. Si no se tiene claro, también se pueden probar en la derivada un par de valores antes y después del 1 y comprobar como es creciente y luego decreciente, o incluso recurrir a la segunda derivada. Ahora bien, este máximo estará en el punto $M(1, f(1)) = M(1,2)$ Es decir, está a una "altura" de 2 unidades. Ya no necesitamos hacer más, aunque podríamos comprobar con la segunda derivada que debe ser siempre $f''(x) < 0$, es decir $\cap$. La función dibujada queda:  Obviamente, en un trazado a mano no sabemos en qué dos puntos corta al eje OX, pero sabemos que debe hacerlo por las características anteriores. Por tanto, la ecuación $f(x) = 0$ tiene efectivamente dos soluciones, y el 1 está entre ellas, como dice el enunciado.
7	Mad 15 Responda razonadamente a las siguientes cuestiones: b) Represente gráficamente la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x}{Lx}$$

b) Determine, según los valores de k, el número de soluciones de la ecuación:

$$x - kLx = 0$$

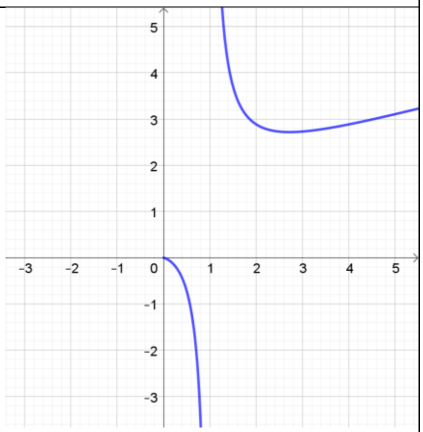
c) Estudie si la sucesión de números reales (a_n) definida por la recurrencia:

$$a_1 = e^{3/2},\ \ a_{n+1} = \frac{a_n}{La_n},\ \ n \geq 1$$

Es convergente y, en caso afirmativo, calcule su límite.

a) Dibujo de la función (hecho en la ficha representación de funciones)

b)



Observemos el apartado anterior. La ecuación $x - kLx = 0$ es equivalente a:

$$\frac{x}{Lx} = k$$

El único caso en que esta ecuación podría no ser cierta sería con $x = 1$, que cancela el denominador. Pero, al no ser solución de la ecuación, descartamos este problema.

A la vista de la función anterior, vemos claramente que:

i) $k > e$: hay dos soluciones, una en $(1, e)$ y otra en (e, ∞)

ii) $k = e$: hay una solución, concretamente $x = e$

iii) $k \in (0, e)$: no hay solución.

iv) $k = 0$: tampoco hay solución (observar la función original)

v) $k < 0$: la ecuación tiene una solución, en $(0,1)$

c)

Obsérvese que $a_1 = e^{3/2} > e$ por lo que la sucesión que tenemos va a tener como límite inferior a e. Probamos esto por inducción:

Para el caso $n = 1$ se ve claramente que $e^{3/2} > e$

Para $n \to n + 1$, como $f(x) = \frac{x}{Lx}$ es creciente, $a_{n+1} = f(a_n) > e$

Ahora vamos a comprobar que a_n es estrictamente decreciente, para efectivamente comprobar que converge, es decir, que $a_{k+1} < a_k$

Vemos que $a_2 < a_1$, pues:

$$a_2 = \frac{a_1}{La_1} = \frac{e^{3/2}}{Le^{3/2}} = \frac{2}{3}e^{3/2} < a_1 = e^{3/2}$$

Para $n \to n + 1$:

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{La_k} \underset{?}{<} a_k \Rightarrow \frac{1}{La_k} < 1 \Rightarrow 1 < La_k$$

Lo cual es cierto, pues $La_k > 1\ \forall a_k$ pues $a_k > e$.

Así pues, la sucesión converge.

Llamemos a al límite. En este caso:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{La_n}$$

En el límite:

$$\lim a_{n+1} = \lim f(a_n)$$

De donde:

$$a = f(a) \Rightarrow a = \frac{a}{La} \Rightarrow La = 1 \Rightarrow \boxed{a = e}$$