Contenido

1. Contexto 2
2. Historia 2
3. Introducción 4
4. Sucesiones 5
5. Sucesiones aritméticas y geométricas 6
6. Sucesiones recurrentes 10
7. Límites 12
8. Aplicaciones 13
9. Conclusión 16
10. Bibliografía 16
11. Posibilidades de ampliación 17

Índice + historia + introducción: 4 páginas
Tema: 12 páginas
Posibilidades de ampliación: 6 páginas

Entre los elementos de ampliación, se recomienda incluir en el tema, en caso de tener tiempo, al menos el concepto y desarrollo de las diferencias finitas, de la forma mostrada u otras.

En los siguientes QR, puedes ver unos apuntes de las universidades de Cantabria, de Elena Álvarez Sáiz, y la Universidad de Granada, de Javier Pérez, que complementan el tema:

UNIVERSIDAD DE GRANADA

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

1. Contexto

- Este tema pertenece al bloque de estructuras numéricas (temas 1 al 10)
- En el currículo, se puede ver en 3º de ESO o 4º de ESO, con alguna aplicación en los temas de aritmética mercantil en 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales. Además, tiene un papel fundamental en el Bachillerato Internacional (IB), tanto a Nivel Medio (NM) como a Nivel Superior (NS). En el primero se trabajan mucho las sucesiones aritméticas y geométricas, y en el segundo, dado que se profundiza mucho en el tema de las series, se añade a lo anterior series aritmético geométricas, telescópicas, convergencia de series, etc.

2. Historia

- Las sucesiones numéricas siempre le han llamado la atención al ser humano a lo largo de su historia, y pueden verse ya sea en rituales o, como en Mesopotamia, en el cálculo de la raíz de 2, haciendo uso de la serie $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$, que tiende a $\sqrt{2}$ (por supuesto con una notación diferente).

- También es conocida la leyenda del inventor del ajedrez (que posiblemente nunca ocurrió). Este fue premiado por el emperador chino con aquello que deseara. La recompensa fue un grano de arroz en la primera casilla del ajedrez, dos en la segunda, cuatro en la tercera... El resultado final es que el número de granos de arroz al sumar las 64 casillas resultaba mayor que todo el arroz que había producido China en toda su historia ($1.8 \cdot 10^{19}$), lo cual muestra el rápido crecimiento de las sucesiones geométricas.

- Sin embargo, no es tan conocida, sobre esta misma leyenda, la historia que muestra el peligro de jugar con sucesiones finitas como si fuesen infinitas. Por supuesto esta historia también es probablemente falsa. Cuenta que el emperador, preocupado, preguntó a sus matemáticos una forma de solucionar el problema. Después de mucho pensar, llegaron a la siguiente conclusión. Llamando S a la suma de los granos de arroz debidos:

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$$

Viendo que todos los factores salvo el 1 son pares, es posible sacar factor común, de forma que:

$$S = 1 + 2 \cdot (1 + 2 + 4 + \cdots) \Rightarrow S = 1 + 2S$$

Resolviendo la ecuación, se tiene que $S = -1$, demostrando que la suma anterior finalmente es igual a -1, algo completamente contra intuitivo, pero matemáticamente "correcto".

Este resultado sería "válido" si los términos fuesen infinitos, pero en este caso el paréntesis no resulta ser exactamente S, aunque lo parece, pues tiene un término menos. Sin embargo, a simple vista, es complicado encontrar el error.

- El propio Euclides ya mostró en su sucesión de números primos una demostración de la existencia de infinitos primos.

Teorema: existen infinitos números primos

Demostración:

Para esta demostración, Euclides utilizó la reducción al absurdo. Imaginemos que q es el último primo. Entonces, podemos construir el número:

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot q$$

Que es divisible entre todos los números primos y, por tanto, no es primo. Pero por la misma razón podemos construir el número:

$$M = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot q + 1$$

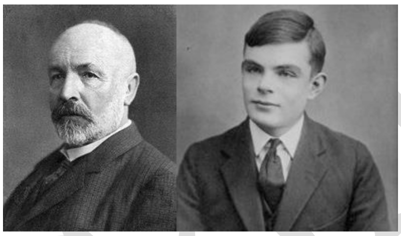
Que ahora resulta no ser divisible por ninguno de los números primos anteriores, dado que el resto de dividir M entre cada uno de los primos siempre es 1. Por tanto, no tiene divisores salvo el 1 y él mismo, por lo que M es un número primo mayor que el número q que presuponíamos al principio.

Esto demuestra que el número de primos es infinito.

- Newton y Leibnitz trabajaron con series de potencias de la forma $\sum a_n x^n$ para el cálculo de primitivas y derivadas, introduciendo la idea de sucesión en el contexto de las series de potencias.

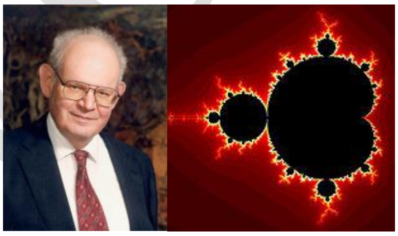
- Euler mismo se encargó de formalizar y trabajar con series infinitas.

- Cantor formalizó los conceptos de conjuntos, que incluyen sucesiones, especialmente cuando uno se plantea conjuntos de elementos infinitos, como puede ser el dado por los números $x_n = \left\{\frac{1}{x_n}\right\}$. Con ello, estabeció la teoría de conjuntos, que tantos resultados supuso, como los que permitieron a Alan Turing descifrar la máquina Enigma de los Nazis, acortando en muchos años el final de la Segunda Guerra Mundial.



- Por último, cabe mencionar a Mandelbrot, que estableció una sucesión de recurrencia con números complejos en la forma

$$f_c: \begin{array}{c} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \to z^2 + c \end{array} \Rightarrow \{f_c^n(0)\}_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \mathcal{M} = \{c \in C | \{f_c^n(0)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ acotada}\}$$



3. Introducción

George tiene ante sí un conjunto de 1600 exámenes tipo test de 15 preguntas. Sabe que, en ninguno de ellos, hay dos preguntas respondidas bien consecutivamente. Él tiene los resultados delante, pero se pregunta cómo podría determinar la probabilidad de que existan al menos dos exámenes iguales haciendo uso de las matemáticas…

En este tema comenzaremos viendo las definiciones básicas de sucesiones, para dar paso en el bloque siguiente al caso particular de sucesiones aritméticas y geométricas, y añadiremos los casos de sucesión aritmético geométrica y telescópica. A continuación, veremos cómo construir sucesiones recurrentes, para mostrar el caso particular de la sucesión de Fibonacci. Dedicaremos un apartado a analizar el problema del límite de la sucesión, para acabar con algunas de las muchas aplicaciones que tienen las sucesiones.

4. Sucesiones

Se denomina **sucesión** a una aplicación $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) de la forma $\{x_n\}, n = 1 \dots \infty$.

En este tema, de forma general, trabajaremos en $\mathbb{R}$. Las operaciones habituales se heredan en las sucesiones:

- Suma: $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$
- Producto por un escalar: $\lambda \cdot \{x_n\} = \{\lambda \cdot x_n\},\ \lambda \in \mathbb{R}$
- Producto: $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$

Las dos primeras propiedades confieren al espacio de las sucesiones el carácter de espacio vectorial, mientras que la 1 y la 3 el de anillo unitario conmutativo con divisores de cero.

Definimos:

- Sucesión **monótona creciente**: aquella que $x_{n+1} \geq x_n$ (equivalentemente **decreciente** $x_{n+1} \leq x_n$)
- Sucesión **acotada superiormente**: si $\exists M \in \mathbb{R} \mid x_n \leq M\ \forall\, n$ (e igualmente se define una sucesión acotada **inferiormente**)
- Sucesión **alterna** si $x_n \cdot x_{n+1} < 0\ \forall n$
- No confundir con una sucesión **oscilante**. Una sucesión alterna puede ser convergente, mientras que una oscilante no tiene límite.
- Sucesión convergente: cuando existe un m tal que se verifica que existe algún número L tal que::

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid si\ n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$$

Entre los muchos resultados que podemos proponer, mencionamos el siguiente:

Proposición: toda sucesión convergente está acotada
Demostración: tomemos una sucesión $\{x_n\}$ que converge a L. Tomemos la definición anterior de convergencia, con $\varepsilon = 1$. Así, $|x_n - L| < 1$. Como $|x_n| - |L| = |x_n - L| < 1$, se deduce que, para $n \geq n_0$, $|x_n| < 1 + |L|$ Tomemos $M = \max\{1 + |L|, |x_1|, |x_2| \dots, |x_{n_0} - 1|\}$ Entonces, para cualquier natural n, tenemos que $x_n \leq M$, así que $\{x_n\}$ está acotada.

Nótese que, en la proposición anterior, la implicación inversa no es necesariamente cierta: una sucesión acotada puede no ser convergente, como le ocurre por ejemplo a la sucesión $x_n = (-1)^n$.

Por otro lado, tenemos varias formas de construir sucesiones:

- **Término general**. Por ejemplo, $a_n = n^2$ es la sucesión de los números que son cuadrados perfectos, $a_n = \{1,4,9,16 \dots\}$

- **Por recurrencia**. Por ejemplo, $f_n = f_{n-1} + 1$ es la sucesión de los números naturales si establecemos que $f_1 = 1$ (empezando en el 1): $f_n = (1,2,3\dots)$. Más adelante hablaremos de ellas en más detalle.

- **Mediante fórmulas**: $f_n = \begin{cases} 1 & n\ par \\ 0 & n\ impar \end{cases}$ que lleva a $f_n = \{0,1,0,1\dots\}$

- **Por extensión**. Por ejemplo con los decimales de $\sqrt{2} = 1.4142\dots$ establecemos la sucesión $d_n = \{1,4,1,4,2\dots\}$

- **Forma explícita**. Cuando no tenemos una forma de definir cada elemento de la sucesión, lo más que podemos decir es cuáles son sus elementos uno a uno. Por ejemplo, los números primos: 2, 3, 5, 7…

5. Sucesiones aritméticas y geométricas

Por su importancia y aplicaciones, distinguimos estos dos tipos:

a) Sucesión aritmética

Una sucesión aritmética es toda aquella en la que al restar dos términos consecutivos el resultado es una cantidad fija llamada diferencia d:

$$a_{n+1} - a_n = d$$

Para calcular el término general observamos la siguiente tabla:

Término		Simplificado
Primero	a_1	$a_1 = a_1$
Segundo	$a_2 = a_1 + d$	$a_2 = a_1 + d$
Tercero	$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d$	$a_3 = a_1 + 2d$
…	…	…
Enésimo	…	$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$

Podemos probar esta fórmula por inducción.

Demostración:
Vemos que el caso $n = 1$ es trivial, pues queda el primer término:
$$a_1 = a_1 + 0 = a_1$$
Para el caso $n + 1$, dando por válida la expresión de partida:
$$a_{n+1} = a_1 + (n + 1 - 1)d = a_1 + (n-1)d + d \Rightarrow a_{n+1} = a_n + d$$
Como se quería probar.

En una sucesión aritmética podemos **sumar** un número de términos. Llamaremos a esta suma S_n, que denota la suma de los primeros n términos. La expresión viene dada por:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$$

Demostración:
Observamos que podemos ordenar la suma en los dos sentidos:
$$S_n = a_1 + [a_1 + d] + [a_1 + 2d] + \dots + [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + (n-1)d]$$

$$S_n = [a_1 + (n-1)d] + [a_1 + (n-2)d] + \cdots + [a_1 + 2d] + [a_1 + d] + a_1$$

Y sumemos ambas término a término. Es fácil ver que todos ellos quedan iguales. Por ejemplo, el primero de la primera suma con el primero de la segunda suma resulta:

$$a_1 + [a_1 + (n-1)d] = a_1 + a_n$$

Los dos segundos:

$$[a_1 + d] + [a_1 + (n-2)d] = a_1 + [a_1 + (n-1)d] = a_1 + a_n$$

Así, si sumamos ambas sumas tenemos:

$$2S_n = n \cdot [a_1 + a_n]$$

Despejando llegamos a la conclusión buscada:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Según cuenta la historia, fue Gauss quien, con 8 años, descubrió esta suma cuando un profesor suyo les pidió que sumasen los primeros 100 números para que los chavales estuviesen entretenidos un rato y él descansase. Los alumnos escribían los resultados en pizarras individuales cuando se trataba de hacer cálculos, y a los pocos minutos, Gauss entregó su pizarra con el número 5050 anotado en ella. El profesor pensaba que había puesto el número al azar, pero pronto comprobó que era correcto.

Gauss se había dado cuenta de que los números se sumaban por parejas, y al detectar esta regularidad, la suma quedaba una operación muy sencilla.

b) Sucesión geométrica

Definimos una sucesión geométrica como aquella en la que al dividir dos términos consecutivos el resultado es un número fijo llamado razón r:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

Para construir esta sucesión procederemos como antes:

Término		Simplificado
Primero	a_1	$a_1 = a_1$
Segundo	$a_2 = a_1 \cdot r$	$a_2 = a_1 \cdot r$
Tercero	$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r$	$a_3 = a_1 \cdot r^2$
…	…	…
Enésimo	…	$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$

Demostración:
De nuevo, probamos esta expresión usando inducción. Para $n = 1$ el resultado es obvio, pues lo que queda es $a_1 = a_1 \cdot r^{1-1} = a_1 \cdot r^0 = a_1$.
En el caso $n + 1$, dando por válida la expresión para n:

$$a_{n+1} = a_1 \cdot r^{n+1-1} = a_1 \cdot r^n$$

Quedando demostrada.

Para estas sucesiones también se define la **suma**, cuya expresión es:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}}$$

Demostración:
Escribimos tanto la suma como dicha suma multiplicada por la razón:

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1}$$
$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n$$

Si restamos término a término vemos que se repiten todos salvo los extremos, por lo que queda:

$$rS_n - S_n = a_1 r^n - a_1 \Rightarrow S_n(r-1) = a_1(r^n - 1) \Rightarrow S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

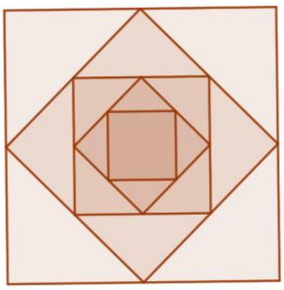
En el caso de las sucesiones geométricas puede ocurrir que tengamos una razón entre 0 y 1. En este caso, los términos serán cada vez más pequeños, de modo que, en el límite (que explicaremos después), se tendrá que:

$$\lim a_n = 0$$

Por tanto, es posible calcular la suma de todos los términos de la sucesión. No hay más que fijarse que, en la expresión de la suma anterior, cuando $n \to \infty$, el término $r^n \to 0$. Así, la suma infinita queda:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$$

Veamos un ejemplo de aplicación: sumemos todas las áreas de los cuadrados de la figura:



Para ello vemos que el primer término es el área del cuadrado grande $a_1 = 16^2 = 256$

Para el segundo cuadrado, utilizando Pitágoras, vemos que su lado viene dado por:

$$l^2 = 8^2 + 8^2 \Rightarrow l = 8\sqrt{2} \Rightarrow a_2 = 128$$

Es sencillo seguir este procedimiento para ver que las áreas de los cuadrados siguen la sucesión $a_n = \{256,128,64,32 \dots\}$

Es decir, una sucesión geométrica de razón 1/2 y primer término 256. Por tanto, la suma de todas las áreas de los cuadrados será:

$$S_\infty = \frac{256}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{256}{1/2} = 512cm^2$$

El problema de la sucesión infinita responde a la pregunta de una de las aporías de Zenón, según la cual "el movimiento no existe". Esto es así, porque para poder avanzar de un punto A a un punto B, es necesario recorrer primero la mitad del camino, y luego la mitad, y la mitad… de modo que nunca llegas a B. Newton y Leibniz resolvieron esta paradoja mediante el cálculo integral, que esencialmente consistía en la suma de infinitos elementos i nfinitamente pequeños (de aquí emerge el concepto de diferencial). Si tomamos una longitud L, dividida en pequeños elementos dx, y los "sumamos" todos:

El genio del amor (vídeo)

$$\int_0^L dx = [x]_0^L = L - 0 = L$$

No obstante, mediante sucesiones, también es posible llegar al mismo resultado. A fin de cuentas, recorrer esta distancia a base de recorrer mitades de caminos, no es más que la suma de los infinitos términos de una sucesión geométrica de primer término $\frac{L}{2}$, y de razón $\frac{1}{2}$:

$$S_\infty = \frac{L/2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{L/2}{1/2} = L$$

c) **Sucesiones aritmético geométricas**

Una sucesión aritmético geométrica combina ambas sucesiones. Denotemos AG_n a la sucesión, a_n a la aritmética y g_n a la geométrica. Entonces, el término general de la sucesión será:

$$AG_n = a_n g_n = \{a \cdot g, \quad (a+d)gr, \quad (a+2d)gr^2, \dots,\}$$

Es decir, su expresión general es:

$$AG_n = (a + (n-1)d)gr^{n-1}$$

<u>Demostración</u> de la suma de una sucesión aritmético geométrica

Podemos calcular la suma de estas sucesiones, sin más que:

$$S_n = ag + (a+d)gr + (a+2d)gr^2 + \cdots + [a + (n-1)d]gr^{n-1}$$
$$rS_n = agr + (a+d)gr^2 + (a+2d)gr^3 + \cdots + [a + (n-2)d]gr^{n-1} + [a + (n-1)d]gr^n$$

Restando, notamos que se cancelan muchos términos (marcados en rojo), además que podemos sacar g factor común:

$$S_n - rS_n = ag + dgr + dgr^2 + dgr^3 + \cdots + dgr^{n-1} - [a + (n-1)d]gr^n$$
$$= ag + dgr + dgr^2 + \cdots + dgr^{n-1} - agr^n - ndgr^n + dgr^n$$

Reconocemos una sucesión geométrica en esta suma:

$$S_n - rS_n = ag + SG(a_1 = dgr; r = r; n = n) - agr^n - ndgr^n$$
$$S_n - rS_n = ag + \frac{dgr(r^n - 1)}{r - 1} - agr^n - ndgr^n$$

Despejando S_n en el lado izquierdo y extrayendo g en factor común:

$$\boxed{S_n=\frac{g}{1-r}\left[a+\frac{dr(r^n-1)}{r-1}-r^n(a+nd)\right]}$$

Aunque podríamos dejarlo así, se puede ir un paso más allá, cambiando de signo el segundo sumando y extrayendo $(1-r)$ factor común:

$$S_n=\frac{g}{(1-r)^2}[a(1-r)+dr(1-r^n)-r^n(a+nd)(1-r)]$$

Desarrollando:

$$S_n=\frac{g}{(1-r)^2}[a-ar+dr-dr^{n+1}-r^n(a+nd)+r^{n+1}(a+nd)]$$

Es decir:

$$\boxed{S_n=\frac{g}{(1-r)^2}[a+r(d-a)-r^n(a+nd)+r^{n+1}(a+(n-1)d)]}$$

d) Sucesiones telescópicas

Una sucesión telescópica es aquella que se construye con otra sucesión de forma que:

$$t_n=a_n-a_{n+1}$$

Esta sucesión tiene la característica que también resulta sencilla de sumar, tanto de forma finita como infinita.

Un ejemplo típico es la sucesión, dada por:

$$t_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Al hacer la suma de los n términos de la sucesión, se tiene:

$$S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Eliminando términos:

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}$$

En el límite, tenemos la **serie de Mengoli**. Haciendo uso del análisis elemental, vemos que $S_\infty=1$

6. Sucesiones recurrentes

Una sucesión recurrente es aquella en la que cada término se construye utilizando los términos anteriores de la sucesión. De forma general:

$$x_{n+k}=f(x_{n+k-1},x_{n+k-2}\dots x_n)$$

Dentro de estas sucesiones, cabe destacar las sucesiones lineales, que son aquellas con la forma:

$$x_{n+k}=a_1x_{n+k-1}+a_2x_{n+k-2}+\cdots+a_kx_n$$

Especialmente interesante resulta el caso de la sucesión de Fibonacci, que es aquella con la forma siguiente (en la que, habitualmente, $a = b = 1$):

$$x_n = a \cdot x_{n-1} + b \cdot x_{n-2}$$

Puede probarse que se puede sacar el término general de esta sucesión a través del **polinomio característico**, que en este caso es:

$$x^2 = ax + b \Rightarrow x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

De forma que pueden darse tres casos:

- Las raíces de la ecuación anterior son reales y distintas. Entonces el término general tendrá la forma:

  $$x_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$$

  Donde α, β son dos constantes que quedarán determinadas en función de los dos primeros términos de la sucesión.

- La ecuación anterior tiene una única raíz doble r. Entonces:

  $$x_n = \alpha r^n + \beta a n r^n = r^n(\alpha + \beta n)$$

- La ecuación anterior tiene raíces complejas. En este caso:

  $$x_n = r^n[\lambda cos(\alpha n) + \mu sen(\alpha n)]$$

Donde r_α es la forma polar del número complejo, y λ, μ constantes a determinar.

- De forma general podemos decir que tendremos un término de la forma r^n por cada raíz simple, una sucesión de la forma $r^n, nr^n \dots n^m r^n$ por cada raíz de multiplicidad m, un par de términos $r^n \cos(n\alpha)$ y $r^n sen(n\alpha)$ por cada raíz compleja simple, y una serie de términos $r^n \cos(n\alpha), nr^n \cos(n\alpha) \dots n^m r^n \cos(n\alpha)$ por cada raíz múltiple compleja de multiplicidad m, más otros tantos con $sen(n\alpha)$

Como ejemplo mostraremos la sucesión habitual de Fibonacci, que es aquella dada por:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \qquad x_1 = x_2 = 1$$

Resolviendo el polinomio característico:

$$x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_n = \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Con las condiciones iniciales tenemos:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \\ x_2 = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema llegamos a que $\alpha = -\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, quedando:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Este resultado lo utilizaremos más adelante para resolver el problema del cumpleaños propuesto inicialmente.

7. Límites

Definimos el límite de una sucesión x si se cumple que:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \ \ |x_n - x| < \varepsilon$$

- Definimos una sucesión convergente si existe límite.
- Una sucesión será divergente cuando el límite sea infinito, es decir, ocurre una de estas dos aseveraciones:
  - $\forall M > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall \, n > n_0 \Rightarrow x_n > M$
  - $\forall M < 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall \, n > n_0 \Rightarrow x_n < M$
- Una sucesión será oscilante cuando no es convergente ni divergente.

Propiedades:

- Si una sucesión tiene límite, este es único.

Demostración:
Supongamos que la sucesión x_n tiene dos límites, x y x'. Entonces, sea

$$\varepsilon < \frac{|x - x'|}{2}$$

$$x = \lim x_n \Rightarrow \exists n_0 \mid n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

$$x' = \lim x_n \Rightarrow \exists n_0' \mid n > n_0' \Rightarrow |x_n - x'| < \varepsilon$$

Con $N = \max(n_0, n_0')$

$$|x - x'| \le |x - x_N| + |x_N - x'| < \varepsilon + \varepsilon < |x - x'|$$

Contradicción. Demostrado.

- Toda sucesión convergente está acotada.
- $\lim(x_n + x_n') = \lim x_n + \lim x_n'$
- $\lim(c \cdot x_n) = c \cdot \lim x_n$
- $\lim(x_n \cdot x_n') = \lim x_n \cdot \lim x_n'$
- $\lim\left(\frac{x_n}{x_n'}\right) = \frac{\lim x_n}{\lim x_n'}, \ si \lim x_n' \neq 0, x_n' \neq 0$

8. Aplicaciones

a) Series: se define una serie como el sumatorio de los infinitos términos de una sucesión: $\sum_1^{\infty} x_n$. Si esta sucesión es sumable (el límite es finito) será una serie convergente, y si no divergente. Existen multitud de criterios para determinar el carácter de una serie (convergente o divergente), como por ejemplo el criterio de D'Alambert, que dice que:

- Si $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ la serie es convergente. Si es > 1 es convergente. Si es 1 no puede usarse este criterio.

Para que una serie sea convergente, una condición necesaria (pero no suficiente) es que $\lim x_n = 0$.

Demostración:
Sean las sumas parciales de una serie la sucesión formada por la suma de términos hasta un término dado:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

sea S el límite de las sumas parciales. Entonces se tiene que el término n ésimo será la diferencia:

$$x_n = S_{n+1} - S_n$$

Por la propia definición de suma parcial. Tomando límites:

$$\lim x_n = \lim S_{n+1} - \lim S_n$$

En el límite, si la sucesión converge, los dos límites del lado derecho deben ser iguales al límite, que hemos llamado S. Por tanto:

$$\lim x_n = S - S = 0$$

b) Descomposición decimal de un número (racional o irracional):

$$\pm a' a_1 a_2 a_3 \dots = \pm a + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \cdots$$

c) Funciones definidas con series de potencias:

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

El desarrollo en serie de Tayor permite expresar una función como serie de potencias, donde los coeficientes son:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Que tiene definido un radio de convergencia, que indica su zona de aplicabilidad, y viene definido por:

$$R = \lim \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

Por ejemplo, la función exponencial se desarrolla como:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

En torno al punto $x_0 = 0$. El radio de esta serie es infinito:

$$R = \lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim(n+1) = \infty$$

Lo que indica que es posible utilizar, siempre que se quiera, la serie en vez de la función. Estos cambios permitieron a Leibnitz el cálculo de muchas derivadas e integrales de funciones en los inicios del cálculo diferencial.

d) Interés compuesto

Al introducir un capital inicial C en un banco durante un número de años t a un interés r, se produce un aumento anual de $\left(1+\frac{r}{100}\right)$. Al aplicar esto sucesivamente (índice de variación), se obtiene la conocida expresión:

$$C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

En esta expresión el tiempo suele venir en años, dado que el rédito r es anual (se aplica cada año). No obstante, pueden utilizarse otros períodos de capitalización. Por ejemplo, puede aplicarse cada mes, en cuyo caso se aplica 12 veces al año siendo el rédito la doceava parte del anual:

$$C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{12 \cdot 100}\right)^{12t}$$

Si seguimos acortando el período de capitalización a un plazo muy pequeño, que llamaremos $1/N$ con N un número grande (número de veces que se aplica al año), llegamos a:

$$C_f = C \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{r}{100N}\right)^{Nt}$$

Esta expresión podemos desarrollarla llegando a:

$$C_f = C \cdot \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{100N}{r}}\right)^{\frac{100N}{r}\frac{r}{100N}\cdot Nt}$$

Que, por la definición del número $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ podemos convertir en:

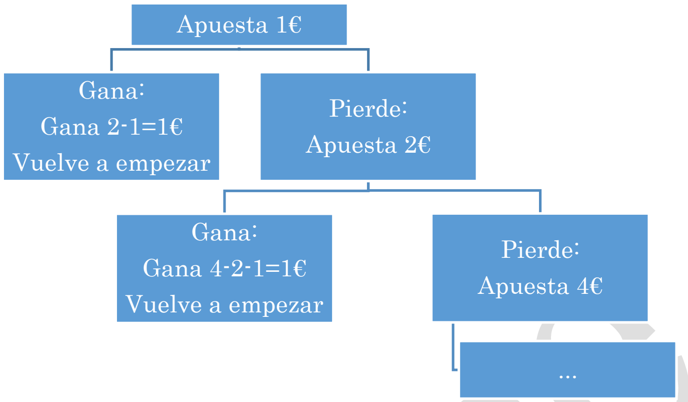
$$C_f = C \cdot e^{\frac{rt}{100}}$$

Esto indica que, por mucho que acortemos el periodo de capitalización, existe un límite que no podemos pasar.

Puede demostrarse que resulta prácticamente el mismo beneficio entre calcular el capital final con períodos de capitalización diarios, o períodos de capitalización cada segundo, debido a este hecho.

e) Teoría de juegos: la martingala

La martingala es una forma de jugar a un juego dicotómico que consiste en lo siguiente:



Si calculamos la esperanza matemática de este juego, se tiene:

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \cdots = \infty$$

Pues, antes o después, siempre acabarás ganando. Y, efectivamente, es así, por lo que este juego tiene esperanza matemática infinita.

En realidad, un proceso de martingala se define como aquel que no tiene deriva. El caso mostrado es la llamada paradoja de San Petersburgo.

Existen artículos muy interesantes que muestran que efectivamente este juego no debería ser puesto en práctica, basándose en varios hechos, como que el valor del dinero depende del dinero que se posea. Así, 1€ es mucho dinero para alguien que no tiene nada, pero no es nada para alguien que tiene mucho. Si se añade este factor al juego, resulta que no merece la pena, ya que en un momento dado puedes tener que apostar cientos de miles de euros para ganar un euro, desmereciendo la apuesta.

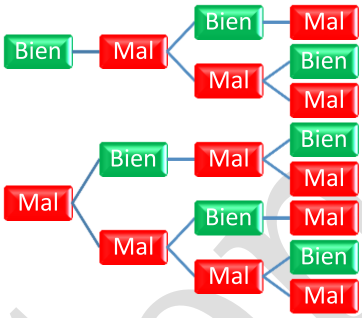
f) Teorías de población maltusianas.

Thomas Malthus estableció en el SXVIII una serie de artículos donde mostraba que la población mundial crecía siguiendo una sucesión geométrica, mientras que los recursos de que disponían seguían una sucesión aritmética. Así, tenía que llegar un momento dado en que la población superaba los recursos, momento en que podía ocurrir alguna de las siguientes causas: enfermedad masiva (como la peste), una guerra mundial, un receso económico o crisis, etc. Las teorías de Malthus han sido ampliamente estudiadas y el problema de la superpoblación relacionado con los recursos es uno de los problemas más actuales, dada su relación con factores sociológicos o económicos.

9. Conclusión

En este tema hemos intentado hacer un recorrido por las sucesiones más básicas introduciéndonos en algunas otras más complejas, pero la teoría de sucesiones, que a simple vista parece un divertimento matemático, ha acabado siendo una de las herramientas más potentes de las matemáticas.
Sin ir más lejos, las series de potencias son la base para la resolución de muchos de los problemas más complejos en física, relacionados por ejemplo con ecuaciones trascendentes, que no podrían ser resueltas de no ser por los desarrollos en serie.

Retomando el problema de George, él se da cuenta que el patrón que siguen los 15 exámenes tipo test es el siguiente (dado que no puede haber dos preguntas bien seguidas):



Y así sucesivamente. Ahora bien, observando cada paso, George observa la secuencia 2,3,5,8… y enseguida reconoce la sucesión de Fibonacci.
Por tanto, dado que son 15 exámenes, el resultado es rápido una vez que sabe trabajar con sucesiones. No tiene más que calcular el término 17 de la sucesión (puesto que en su esquema faltan los dos primeros unos), y tendrá el resultado.
Con lo que hemos visto en el tema:

$$f_{17} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{17} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{17}\right) = 1597$$

Por tanto, y dado que hay 1600 exámenes, George demuestra que debe haber, por fuerza, más de dos exactamente iguales.

10. Bibliografía

- Spivak, Calculus
- Introducción a los números y al análisis matemático, Baldomero Rubio.
- Números y convergencia, Baldomero Rubio.
- The Joy of X, Steven Strogatz
- Historia de las matemáticas, Ian Stewart.
- Apuntes temarios oposición.

11. Posibilidades de ampliación

Este es uno de los temas más importantes, pero también de un contenido accesible a muchos opositores, por lo que conviene destacarse del resto. Como sugerencias, recomendamos:

- Diferencias finitas. Si tienes tiempo, este bloque es el primero que deberías añadir al tema.

Definición: sea (x_n) una sucesión (en un cuerpo $\mathbb{K}$). Se llama **sucesión de las diferencias primeras** a:

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

Igualmente, podemos construir la sucesión de las **diferencias segundas** como:

$$\Delta^2 x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n$$

Así, sucesivamente, tenemos que las diferencias de orden k serán:

$$\Delta^k x_n = \Delta^{k-1} x_{n+1} - \Delta^{k-1} x_n$$

Teorema: sea (x_n) una sucesión. El término general de esta sucesión, y la suma de los primeros n términos consecurivos, puede expresarse como:

$$\begin{cases} x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot \Delta^k x_1 = \binom{n-1}{0} x_1 + \binom{n-1}{1} \Delta x_1 + \cdots + \binom{n-1}{n-1} \Delta^{n-1} x_1 \\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{k-1} x_1 = \binom{n}{1} x_1 + \binom{n}{2} \Delta x_1 + \binom{n}{3} \Delta^2 x_1 + \cdots + \binom{n}{n} \Delta^{n-1} x_1 \end{cases}$$

Demostración: utilizaremos inducción.

Probamos que es cierto para $n = 1$:

$$\begin{cases} x_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{1-1}{k} \cdot \Delta^k x_1 = \binom{0}{0} \cdot x_1 = x_1 \\ S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \binom{1}{k} \Delta^{k-1} x_1 = \binom{1}{1} \cdot x_1 = x_1 \end{cases}$$

Hecho esto, asumiremos válida la expresión, y trataremos de demostrar que, con ella, es también válida la expresión para $n+1$:

$$x_{n+1} \underset{?}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \Delta^k x_1$$

Como $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, entonces $x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$. Ahora bien, aplicando la hipótesis de inducción a x_n y Δx_n:

$$x_{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot \Delta^k x_1 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot \Delta^{k+1} x_1$$

Cambiamos el segundo sumatorio, de forma que:

$$\begin{cases} t = k+1 \Rightarrow k = t-1 \\ k \in [0, n-1] \Rightarrow t \in [1, n] \end{cases}$$

$$x_{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot \Delta^k x_1 + \sum_{t=1}^{n} \binom{n-1}{t-1} \cdot \Delta^t x_1$$

Al ser una variable muda, podemos volver a cambiar t por k. Extraemos el término 0 del primer sumatorio, y el término n del segundo, para poder combinar ambos sumatorios:

$$x_{n+1}=\binom{n-1}{0}x_1+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}\Delta^k x_1+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}\Delta^k x_1+\binom{n-1}{n-1}\Delta^{n-1}x_1$$

Al juntar los sumatorios, tenemos que usar la propiedad de números combinatorios que dice que $\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}$:

$$x_{n+1}=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\Delta^k x_1+\Delta^{n-1}x_1$$

Ahora bien, dada la estructura de la expresión, no tenemos más que incluir en el sumatorio los dos valores extremos, para llegar, como queríamos, a:

$$x_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\Delta^k x_1$$

Como se quería demostrar.

De forma similar puede demostrarse S_n, haciendo uso de lo ya demostrado.

Con esto, podemos construir progresiones aritméticas de orden superior, que no son más que:

$$\begin{cases} x_n=\binom{n-1}{0}x_1+\binom{n-1}{1}\Delta x_1+\cdots+\binom{n-1}{p}\Delta^p x_1 \\ S_n=\binom{n}{1}x_1+\binom{n}{2}\Delta x_1+\cdots+\binom{n}{p+1}\Delta^p x_1 \end{cases}$$

Donde, si tomamos $p=1$, tenemos las progresiones aritméticas ordinarias.
De aquí, se deduce un importante resultado:
La suma de una progresión de orden superior, será un polinomio de grado $p+1$ en n

Ejemplo (posiblemente no dé tiempo en el tema): calculemos la suma de los primeros n cubos, es decir, los primeros n términos de la progresión:

$$x_n=n^3$$

Esta progresión es aritmética superior de orden 3. Calculamos sus diferencias finitas:

$$\begin{array}{rllllll} x_n= & \boxed{1}, & 2^3, & 3^3, & 4^3, & 5^3 & \ldots \\ \Delta x_n= & & \boxed{7}, & 19, & 37, & 61 & \ldots \\ \Delta^2 x_n= & & & \boxed{12}, & 18, & 24 & \ldots \\ \Delta^3 x_n= & & & & \boxed{6}, & 6 & \end{array}$$

Vemos que la fila de $\Delta^3 x_n$ es constante e igual a 6. Por tanto:

$$S_n=\binom{n}{1}\cdot 1+\binom{n}{2}\cdot 7+\binom{n}{3}\cdot 12+\binom{n}{4}\cdot 6=\frac{(1+n)^2\cdot n^2}{4}=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Que es la fórmula de los n primeros cubos, un polinomio de orden 4. Además, es interesante notar que la suma de los primeros n cubos, es el cuadrado de la suma de los n primeros naturales.

- Existen numerosas proposiciones, fácilmente demostrables, que podrían tener cabida en el tema. Por ejemplo:

Proposición: el producto de una sucesión convergente a cero por una sucesión acotada, es una sucesión que a su vez converge a cero.
Teorema de Bolzano-Weierstrass. Cualquier sucesión monótona y acotada de números reales es convergente.
Proposición: sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales, que converge a L. Entonces, cualquier sucesión parcial de $\{x_n\}$ también converge a L.

- En sucesiones geométricas, puede explicarse la siguiente propiedad:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Cuya demostración, por inducción, resulta muy sencilla:

Demostración:
Por inducción. Para $n = 1$ es trivial:

$$a_1 = \sqrt{(a_1 \cdot a_1)^1}$$

En el caso $n \to n+1$, debe cumplirse:

$$\underbrace{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}_{\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}} \cdot \underbrace{a_{n+1}}_{a_n \cdot r} = \sqrt{\left(a_1 \cdot \underbrace{a_{n+1}}_{a_n \cdot r}\right)^{n+1}}$$

$$\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} \cdot a_n \cdot r = \sqrt{(a_1 \cdot a_n \cdot r)^{n+1}}$$

Elevamos al cuadrado:

$$(a_1 \cdot a_n)^n \cdot a_n^2 \cdot r^2 = (a_1 \cdot a_n \cdot r)^{n+1}$$

Y desarrollamos el miembro derecho:

$$(a_1 \cdot a_n)^n \cdot a_n^2 \cdot r^2 = (a_1 \cdot a_n)^{n+1} \cdot r^{n+1}$$

$$(a_1 \cdot a_n)^n \cdot a_n^2 \cdot r^2 = (a_1 \cdot a_n)^n \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot r^{n+1}$$

Por lo que:

$$a_n^2 = a_1 \cdot a_n \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Que es justo la forma del término general de la sucesión geométrica.

- De igual forma, puede verse fácilmente que:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

- Puedes hablar de la media geométrica, y su relación con la estadística:

$$\bar{g} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

Así como su relación con la media aritmética:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Igualdad que solo ocurre si todos los términos son iguales.

La media geométrica aparece, por ejemplo, en geometría. En un triángulo rectángulo, siendo m y n las proyecciones de los dos catetos sobre la hipotenusa, y h la altura, se tiene que:

$$h = \sqrt{m \cdot n}$$

- En cuanto a las sucesiones recurrentes, puedes explicar con más detenimiento el polinomio característico (aunque quizá suponga salirse del tema). Sin embargo, puede ser interesante demostrar que, en la sucesión de Fibonacci, se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

De hecho, puede hacerse con una sucesión tipo Fibonacci cualquiera, sin ser necesario que los dos primeros términos sean $a_1 = a_2 = 1$.

Este problema está resuelto en la ficha de series y sucesiones.

<u>Demostración:</u>

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}$$

Multiplicamos y dividimos por $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}$$

En el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n = 0$$

Por lo que:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 0}{1} = \boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\phi}$$

- Cualquier expresión decimal periódica puede considerarse como la suma infinita de una progresión geométrica de razón menor que uno:

$$23.\widehat{09} = 23 + 0.09 + 0.0009 + \cdots = 23 + \frac{09}{100} + \frac{09}{100^2} + \cdots$$

De esta forma, podemos realizar el paso de decimal a fracción usando la fórmula de la suma infinita de términos:

$$23.\widehat{09} = 23 + \frac{0.09}{1 - \frac{1}{100}} = 23 + \frac{0.09}{0.99} = 23 + \frac{9}{99} = \frac{23 \cdot 99 + 9}{99}$$

Si queremos la conocida expresión que se da en secundaria, podemos realizar la siguiente manipulación:

$$\frac{23 \cdot 99 + 9}{99} = \frac{23 \cdot (100 - 1) + 9}{99} = \frac{2300 - 23 + 9}{99} = \frac{2309 - 23}{99}$$

Es decir, "el número sin decimales ni coma, menor la parte entera, entre tantos nueves como cifras periódicas tenga".

Lo mismo puede realizarse con los decimales periódicos mixtos.

- Relación de las sucesiones con las series, y aquí puede contarse casi cualquier cosa, aunque hay que tener en cuenta no salirse demasiado del tema: convergencia de series, desarrollos de Taylor, radio de convergencia, series de Fourier…
- Como aplicaciones, quizá es buen momento para modelizar la expansión de un virus, tanto biológico como informático, siguiendo una sucesión geométrica.
- Puede ser interesante la demostración de algún lema o proposición relacionada con el tema. Por ejemplo:

  "Toda sucesión convergente está acotada."

  "Toda sucesión monótona y acotada es convergente."

  "Al multiplicar una sucesión que converge a cero por una sucesión acotada, el resultado es una sucesión que tiende a cero."

  Sus demostraciones no resultan excesivamente complejas.
- En cuanto a la relación entre las sucesiones y el cálculo diferencial, existen numerosas relaciones entre ellas. Por ejemplo, cabe mencionar el **teorema de Bolzano-Weierstrass:**

  Teorema (de Bolzano Weierstrass): sea a_n una sucesión acotada, entonces tiene alguna subsucesión convergente.

  Muchos de estas relaciones y teoremas sirven, por ejemplo, para la demostración de la continuidad de algunas funciones. Pueden verse algunos resultados en estos apuntes de Pepe Aranda, de la UCM de Madrid, del departamento de física teórica:

- Aunque resulta algo repetitivo, pues se explica en la parte de límites, también pueden verse las propiedades de las sucesiones, como que para dos sucesiones convergentes (x_n) e (y_n), que convergen a x e y, la sucesión suma $(x_n + y_n)$ converge a $x + y$. Lo mismo ocurre con el producto y la división, en caso que $y \neq 0$.

- Puede hablarse también de las sucesiones de Cauchy, que además lleva aparejado el siguiente teorema:

  "Toda sucesión es convergente si y solo si es una sucesión de Cauchy."

- El tema puede prestarse también a mencionar y demostrar el lema de Sandwich, que dice que, para tres sucesiones $(x_n), (y_n), (z_n)$, si se cumple que $x_n \leq y_n \leq z_n$, a partir de un cierto n, y $x_n \to L$ y $z_n \to L$, entonces también $y_n \to L$.

- En sucesiones aritméticas y geométricas, resulta sencillo explicar cómo interpolar un número determinado de términos entre dos dados.

- Como ejemplo de sucesión, puedes mostrar el número e:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

  O, en una versión más compleja, con una sucesión que tienda a infinito en lugar de n. Sea como sea, puede ser incluso interesante adjuntar la demostración de que converge, o que es un número irracional (esta demostración está en las fichas de ejercicios y en el tema de la exponencial), pero se sale un poco del objetivo del tema.